Gaussova doktorska disertacija iz 1799. godine

Preveo: Ivan Jukić, 2021.
Naslov izvornika: Demonstratio nova theorematis omnem fvnctionem algebraicam rationalem integram vnivs variabilis in factores reales primi vel secvndi gradvs resolvi posse, Carolvs Friedericvs Gavss, 1799.

email:ivan.jukic@hi.ht.hr

Sadržaj:
-prijevod
-transkript originala

Novi dokaz teorema da svaka algebarska racionalna integralna funkcija* jedne varijable može biti rastavljena u realne faktore prvog i drugog stupnja

koji je Carl Friedrich Gauss predstavio
uvaženom društvu filozofa** Akademije Julia Carolina
u namjeri da zadobije najvišu filozofsku čast

Helmstedt
kod C.G. Fleckeisena , 1799.

* Cijela racionalna funkcija, današnjim rječnikom rečeno (op.prev.)
**U tadašnje vrijeme riječ filozofija zamjenjivala je u protokolarnom značenju riječ znanost (op.prev.)

1.

Svaka određena algebarska jednadžba može biti svedena na oblik
$x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + ... + M = 0$, tako da *m* bude pozitivan cijeli broj. Ako označimo prvi dio te jednadžbe sa *X* i pretpostavimo da je jednadžba *X* = 0 zadovoljena sa nekoliko različitih vrijednosti od *x*, recimo postavljajući $x = \alpha$, $x = \beta$, $x = \gamma$, itd., tada će funkcija *X* biti djeljiva s produktom $x - \alpha$,$x - \beta$, $x - \gamma$, itd.

Suprotno, kad je produkt nekoliko jednostavnih faktora $x - \alpha$,$x - \beta$, $x - \gamma$, itd. djelitelj funkcije *X*, tada će jednadžba *X* = 0 biti zadovoljena ako se za *x* stavi svaka od vrijednosti α, β, γ, itd.

Konačno, kad je *X* jednak produktu od *m* takvih jednostavnih faktora (koji smiju svi biti različiti, ili pak neki od njih smiju biti identični), onda, pored ovih, drugi jednostavni faktori ne mogu biti djelitelji funkcije *X*. Zbog tog razloga jednadžba *m*-tog stupnja ne može imati više od *m* korijena; istovremeno je naravno jasno da jednadžba *m*-tog stupnja može imati *manje* korijena, pa ako *X* može biti rastavljena na *m* jednostavnih faktora: to jest ako su između tih faktora neki identični, onda broj različitih koji zadovoljavaju jednažbu mora obavezno biti manji od *m*. Prema dogovoru matematičari radije kažu i tom slučaju da jednadžba ima *m* korijena, jedino što ispada da su neki od njih isti.

2.

Ono što je do sada izloženo dovoljno je dokazano u knjigama o algebri i matematička strogost toga nije upitna. No analitičari su, čini se, prebrzo i bez prethodnog čvrstog dokaza, prihvatili teorem na kojem se zasniva gotovo cjelokupno učenje o jednadžbama:
da se bilo koja funkcija X može uvijek rastaviti u jednostavne faktore ili, što je u potpunosti s tim u suglasju, *da svaka jednadžba stupnja m doista ima m korijena.* No već kod jednadžbi drugog stupnja pojavljuju se dosta često takvi slučajevi koji nisu u suglasju sa ovim teoremom. Da bi se i ti slučajevi usuglasili s njim, algebristi su bili prisiljeni izmisliti imaginarnu veličinu čiji kvadrat je –1; a onda su potvrdili, ako se veličine oblika $a + b\sqrt{-1}$ prihvate na isti način kao i realne veličine, da je teorem istinit ne samo za jednadžbe drugog stupnja nego također i za kubne i bikvadratne jednadžbe. No nije nikako na osnovu toga bilo dozvoljeno zaključiti da prihvaćanjem veličina oblika $a + b\sqrt{-1}$ mogu biti zadovoljene jednadžbe petog i viših stupnjeva ili, kako se često iskazuje (premda bih ja dao manje sklizak iskaz), da korijeni bilo koje jednadžbe mogu biti svedeni na oblik $a + b\sqrt{-1}$. Ovaj teorem se ne razlikuje od onog navedenog u naslovu ovog teksta, i ako se uzme u obzir sama suština, namjera je ove disertacije da dade strogi dokaz ovog teorema. Ponavljam, od vremena kad su analitičari pronašli da ima beskonačno mnogo jednadžbi koje uopće nemaju korijena osim ako se ne prihvate veličine oblika $a + b\sqrt{-1}$ kao osobita vrsta nazvana *imaginarnim* veličinama, te pretpostavljene veličine su proučavane i uvedene u cjelokupnu analizu; sa kojim opravdanjem, ovdje neću raspravljati. Ja ću lišiti moj dokaz bilo kakve pomoći imaginarnih veličina, iako bih mogao uzeti tu slobodu koju koriste svi oni koji se bave analizom.

3.

Premda su dokazi ovog teorema koje možemo naći u većini udžbenika nepouzdani i tako nekonzistentni u smislu matematičke strogosti da gotovo nisu vrijedni spomena, ja ću se, bez obzira na to, ukratko osvrnuti na njih tako da ništa ne bude izostavljeno.

U namjeri da pokažu da bilo koja jednadžba $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + itd. + M = 0$, ili *X* = 0, doista im *m* korijena, pokušava se dokazati da se *X* može rastaviti u *m* jednostavnih faktora.

Da bi se to postiglo pretpostavlja se *m* jednostavnih faktora $x-\alpha$, $x-\beta$, $x-\gamma$, itd., gdje α, β, γ, itd. još nisu poznati, i postavlja se da je njihov produkt jednak funkciji *X*. Nakon toga se usporedbom koeficijenata izvodi *m* jednadžbi i tvrdi da se iz toga mogu odrediti nepoznate veličine α, β, γ, itd. ukoliko je njihov broj također *m*. Naravno, može se eliminirati *m*–1 nepoznanica dok se ne dođe do jednadžbe koja, kako se čini ispravnim, sadrži samo jednu nepoznanicu. Neću govoriti što se sve još može prigovoriti ovakvoj argumentaciji, samo ću upitati kako možemo biti sigurni da ta posljednja jednadžba ima neki korijen? Zar ne bi bilo moguće i to da od svih realnih i imaginarnih brojeva nema niti jedan koji zadovoljava ovu posljednju jednadžbu, ili polaznu jednadžbu? Štoviše, dobro upućeni će lako opaziti da ova posljednja jednadžba neizostavno mora biti *potpuno identična* sa polaznom jednadžbom ukoliko se izračun vrši po pravilima. Drugim riječima, nakon što se eliminiraju nepoznanice β, γ, itd. mora se dobiti jednadžba $\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + itd. + M = 0$. Nije potrebno ništa više dodati tom rasuđivanju. Neki autori koji su, čini se, opazili slabost ove metode uzimaju praktično kao aksiom da jednadžba doista ima korijene, ako ne one moguće, onda bar one nemoguće. Što podrazumijevaju pod ono moguće, a što pak pod ono nemoguće nije uopće dovoljno jasno izloženo. Ako moguće veličine označavaju isto što i realne veličnine, a nemoguće isto što i imaginarne, onda taj aksiom nikako ne može biti prihvaćen kao takav, već je neophodan dokaz. Međutim, ne čini se da izrazi trebaju biti prihvaćeni u tom smislu, nego da je značenje aksioma prije ovo: „Iako još nismo sigurni da mora postojati *m* realnih ili imaginarnih veličina koje zadovoljavaju bilo koju jednadžbu stupnja *m*, zasad ćemo to pretpostaviti; pošto ako se slučajno dogodi da mnoge realne ili imaginarne veličine ne budu pronađene, tada imamo izlaz da možemo reći da su te druge veličine nemoguće."
Ako netko hoće radije koristiti tu frazu nego jednostavno reći da jednadžba u tom slučaju nema toliko korijena, na to nemam primjedbi; ali ako nakon toga pokuša koristiti te nemoguće korijene na način kao da su stvarni, i npr. kaže da je suma svih korijena jednadžbe $x^m + Ax^{m-1} + itd. = 0$ jednaka -*A*, iako među sumandima ima nemogućih korijena (koji izraz zapravo znači: *iako nekih nema*), to nikako ne mogu odobriti. Jer nemogući korijeni, prihvaćeni na taj način, jesu korijeni, te se onda aksiom ne može prihvatiti bez dokaza, a ne bi bilo neprimjereno razmišljati ne postoje li jednadžbe koje nemaju čak ni nemoguće korijene.*

---

* Pod imaginarnom veličinom ja ovdje uvijek podrazumijevam veličinu obuhvaćenu u obliku $a+b\sqrt{-1}$, sve dok *b* nije = 0. Ovaj izraz na taj način koriste svi prvorazredni matematičari; i uvjeren sam da ne treba slušati one koji veličinu $a+b\sqrt{-1}$ nazvaju imaginarnom samo u slučaju kad je *a* = 0, a nemogućom kad *a* nije = 0; jer takvo razlikovanje niti je nužno niti je od kakve koristi.
Ukoliko se imaginarne veličine uopće trebaju zadržati u analizi (što se, jednom kad se zasnuju na solidan način, zbog mnogo razloga čini više za preporučiti nego za odbaciti), onda one nužno moraju biti uzete jednako mogućima kao i realne veličine, zbog kojeg razloga bih obuhvatio i realne i imaginarne veličine pod zajednički naziv *moguće veličine*. Nasuprot tome nazvao bih *nemogućim* one veličine koje bi morale zadovoljiti uvjete koji čak ne bi mogli biti zadovoljeni i uz dozvoljavanje imaginarnih veličina. Taj izraz bi označavao isto što i da takva veličina ne postoji u svijetu veličina. Međutim ne mogu dopustiti da se od toga načini neka nova vrsta veličine. Ako bi netko rekao da je pravokutni istostranični trokut nemoguć, nema toga koji bi to osporio. No ako bi namjerio da smatra takav nemoguć trokut novom vrstom trokuta i da mu pridruži druga svojstva trokuta, bi li se itko se suzdržao od smijeha? To bi bilo igranje riječima, ili prije njihova zloupotreba.
Zaista čak i prvorazredni matematičari se katkad služe postupcima koji pretpostavljaju mogućnost veličina čija je mogućnost dvojbena, no mogao bih reći da se slobode te vrste uglavnom odnose na puke forme za izračunavanja, poput nekog vela koji će oštar um pravog matematičara uskoro moći probiti. Ipak, čini se uputnijim i dostojnijim uzvišene znanosti, koja se s pravom slavi kao najsavršeniji model jasnoće i pouzdanosti, ili zabraniti takve slobode u potpunosti ili ih barem koristiti što rjeđe; i koristiti ih samo onda kad i manje iskusne osobe mogu shvatiti da se dotična materija može tretirati i bez takvih sloboda, iako možda ne tako sažeto, ali ipak s istom strogošću. Ne mogu sasvim poreći da se ono što sam rekao protiv zloupotrebe nemogućih veličina može u određenom pogledu primijeniti i protiv imaginarnih veličina, ali čuvam opravdanje ovog potonjeg, i zapravo cjelovitije objašnjenje cijele te stvari, za drugu priliku.

4.

Prije nego dadem pregled dokaza našeg teorema koje su izveli drugi matematičari i izložim što, po mom mišljenju, mora biti podvrgnuto kritici u svakom od njih, primjećujem da je dovoljno pokazati samo ovo: svaka jednadžba $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + itd. + M = 0$, ili $X = 0$ (gdje su koeficijenti *A*, *B*, itd. svi realni brojevi), kojeg god stupnja bila, će biti zadovoljena barem jednom vrijednošću *x*, oblika $a + b\sqrt{-1}$. Nadalje dobro je poznato da je onda *X* djeljivo sa $xx + 2ax + aa + bb$, ako *b* nije = 0, i sa *x* – *a* ako je *b* = 0, i u svakom od tih slučajeva kvocijent će biti realan i nižeg stupnja od *X*. Pošto, koristeći isto umovanje taj kvocijent mora imati realni faktor prvog ili drugog stupnja, jasno je da će, nastavljajući taj proces dijeljenja, funkcija *X* na kraju biti rastavljena na faktore prvog ili drugog stupnja; ili samo na *m* faktora prvog stupnja ako preferirate dva imaginarna faktora prvog stupnja u odnosu na jedan drugog stupnja.

5.

Prvi dokaz teorema dugujemo velecijenjenom matematičaru d'Alembert-u (*Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746, p.182 ff*). Isti dokaz je iznijet u *Bougainville, Traité du calcul intégral, à Paris 1754, p. 47 ff.* Osnovne stavke ove metode su kako slijedi.

On prvo dokazuje slijedeće. Kakva god funkcija X varijable *x* bila = 0, ili za *x* = 0 ili za *x* = ∞, ona može poprimiti beskonačno malu, pozitivnu, realnu vrijednost kad se *x*-u dodijeli realna vrijednost, a ta funkcija također može poprimiti i beskonačnu malu negativnu vrijednost kad je *x* realan broj ili imaginaran, oblika $p + q\sqrt{-1}$. Nadalje neka *Ω* označava beskonačno malu vrijednost funkcije *X*, a *ω* pripadajuću vrijednost za *x*. Dalje tvrdi da se *ω* može izraziti kao brzo konvergirajući red $a\Omega^{\alpha} + b\Omega^{\beta} + c\Omega^{\gamma} + itd.$, gdje su eksponenti α, β, γ, itd. konstantno rastući racionalni brojevi koji će biti pozitivni barem do neke određene udaljenosti od početka reda, i da će to učiniti članove, u kojima se pojave, beskonačno malima. Ako se među tim eksponentima ne pojavi niti jedan koji je parni razlomak, tada će svi članovi reda biti realni brojevi kako za pozitivne tako i za negativne vrijednosti *Ω*. No ako se među tim eksponentima nađu neki koji su parni razlomci, tada će odgovarajući članovi, za negativne vrijednosti *Ω* biti oblika $p + q\sqrt{-1}$. Budući da red vrlo brzo konvergira dovoljno je u prethodnom slučaju razmotriti samo prvi (tj. najveći) član; u posljednjem slučaju ne treba ići dalje od člana koji prvi proizvede imaginarni dio.

Sličnim umovanjem može se pokazati: ako *X* može poprimiti beskonačno malu negativnu realnu vrijednost za realnu vrijednost *x*, tada funkcija također može poprimiti beskonačno malu pozitivnu realnu vrijednost za realnu vrijednost *x*, ili za imaginarno *x* oblik $p + q\sqrt{-1}$.

Odatle još zaključuje da postoji konačna realna vrijednost za *X*, u prvom slučaju negativna, u drugom pozitivna, koja može biti proizvedena imaginarnom vrijednošću *x*, oblika $p + q\sqrt{-1}$.

Stoga slijedi, ako je *X* takva funkcija od *x* da poprima realnu vrijednost *V* kad *x* ima realnu vrijednost *v*, i također poprima veću ili manju realnu vrijednost beskonačno malog iznosa za realno *x*, onda ta ista funkcija može također poprimiti realnu vrijednost veću ili manju od *V* (respektivno) za beskonačno mali, a čak i za konačni, iznos pridjeljivanjem *x*-u vrijednost oblika $p + q\sqrt{-1}$. Ovo se može izvesti iz prethodnog bez poteškoća ukoliko se *X* zamijeni sa *V*+*Y*, a *x* sa *v*+*y*.

Konačno d'Alembert tvrdi: ako se pretpostavi da se *X* može kretati kroz cijeli interval između dva realna broja *R* i *S* (t.j da bude jednak *R*, zatim *S*, kao i svim realnim brojevima između) uvijek pridjeljujući *x*-u oblik $p + q\sqrt{-1}$, tada se štoviše funkcija *X* može povećavati ili

smanjivati (ovisno je li $S>R$ ili $S<R$) za konačan realan iznos a da pri tom x uvijek ima oblik $p+q\sqrt{-1}$.
Jer ako postoji takva realna vrijednost U* (uzimajući da S pada između U i R) koju X ne bi mogao doseći uz odgovarajuću vrijednost x-a, tada X nužno ima maksimum (to jest kad je $S>R$, odnosno minimum kad je $S<R$), nazovimo ga T, koji će biti dosegnut za neku vrijednost $p+q\sqrt{-1}$ od x, tako da nikakva slična vrijednost ne može biti pridijeljena x-u koja bi učinila funkciju X bližom za ma kako mali iznos prema U. Sada u jednažbi sa X i x, neka x bude svuda zamijenjen sa vrijednošću $p+q\sqrt{-1}$, zatim prvo stavimo za realni dio da je jednak nuli, pa zatim za onaj drugi dio uz $\sqrt{-1}$, koji će tada nestati. Od dvije tako dobivene jednadžbe eliminacijom se mogu dobiti dvije druge, jedna u kojoj će se ponovo pojaviti p, X i konstante, i druga, bez p, koja ima samo q, X i konstante.
Tako, kad X prolazi kroz sve vrijednosti od R do T za realne vrijednosti p, q, tada se, prema prethodnom, X približava vrijednosti U sve više kad se za p i q pridjeljuju vrijednosti $\alpha+\gamma\sqrt{-1}$, $\beta+\delta\sqrt{-1}$, respektivno. Odatle se međutim može učiniti da bude $x=\alpha-\delta+(\gamma+\beta)\sqrt{-1}$, t.j. opet oblik $p+q\sqrt{-1}$, suprotno hipotezi. Tako kad se pretpostavi da X označava funkciju oblika $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+itd.+M$, uočava se bez teškoća da se x-u mogu pridijeliti takve realne vrijednosti da X može prolaziti cijeli interval između dva realna broja. Stoga se može naći neka vrijednost oblika $p+q\sqrt{-1}$ za x, takva da X može postati =0. Kraj dokaza.**

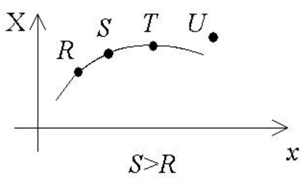
6.

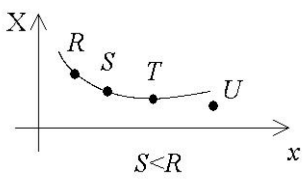
Mogući prigovori d'Alembert-ovom dokazu su općenito slijedeći:

1. d'Alembert ne izražava nikakvu sumnju u postojanje vrijednosti x-ova kojima odgovaraju vrijednosti X, već prepostavlja njihovu egzistenciju i samo ispituje oblik tih vrijednosti.
Premda je taj prigovor sam po sebi stvarno težak, on se ipak ovdje odnosi samo na formu izražavanja, koja se lako može ispraviti tako da prigovor može biti potpuno poništen.

---

*Na slijedećim sličicama sam dao samo ilustraciju onoga na što Gauss misli jer je, naravno, varijabla x kompleksna i ne može biti prikazana na pravcu (op.prev.)





** Pravilno je primjetiti da d'Alembert primjenio geometrijska razmatranja u izlaganju svog dokaza i gledao na X kao na apscisu, a na x kao na ordinatu krivulje (prema običaju svih matematičara prvog dijela ovog stoljeća kojima je pojam funkcija bio manje blizak). No cijelo umovanje, ukoliko se uzme samo ono bitno, leži ne na geometrijskim već na čisto analitičkim načelima, a imaginarna krivulja i imaginarne ordinate su prilično teški pojmovi i mogli bi začuditi današnjeg čitatelja. Stoga sam radije ovdje dao taj prikaz u čistoj analitičkoj formi. Ovu fusnotu sam dodao tako da netko tko bi usporedio d'Alember-tov dokaz sa ovim izloženim u sažetom obliku ne bi pomislio da je nešto bitno izmijenjeno.

2. Tvrdnja da se ω može uvijek izraziti kao red takve vrste kao što je navedeno, sigurno je pogrešna ako X smije označavati i kakvu transcendentnu funkciju (kao što d'Alembert sam priznaje na nekoliko mjesta). Ovo je očito, na primjer, kad se stavlja $X = e^{\frac{1}{x}}$ ili $x = \frac{1}{\ln X}$.
Ako međutim ograničimo dokaz na slučaj kad je X algebarska funkcija od x (što zadovoljava sadašnji zadatak) tada je propozicija u svakom slučaju istinita. Pored toga, d'Alembert ne navodi ništa za protvrdu svoje pretpostavke.
Bougainville se slaže da X treba biti algebarska funkcija od x i preporučuje Newtonov paralelogram za razvoj u red.

3. On radi s beskonačno malim veličinama sa većom slobodom nego što je to u suglasju s matematičkom strogošću ili što bi, u svakom slučaju, dopustio pažljiv analitičar naših dana (koji takvim veličinama opravdano nije sklon). Također nije dovoljno jasno objasnio skok od beskonačno male veličine Ω na konačnu veličinu. Do zaključka u svojoj propoziciji, da Ω može dosegnuti neku konačnu vrijednost, on je čini se, došao ne toliko zbog mogućnosti da Ω ima beskonačno malu vrijednost, već prije zbog činjenice da se , za vrlo male vrijednosti Ω i zbog brze konvergencije reda, ona približava stvarnoj vrijednosti ω to više što se više članova reda uzima u obzir. Pored činjenice da se cijela ova argumentacija čini previše nejasnom da bi se iz nje mogao izvući strogi zaključak, primjećujem da svakako postoje redovi koji su, kako god mala vrijednost može biti pridijeljena veličinama čija se potencija povećava, unatoč tome divergentni, samo ako se nastavi dovoljno daleko, tako da se može stići do članova koji mogu biti veći od bilo koje zadane vrijednosti.*
To se događa kad koeficijenti reda čine hipergeometrijsku progresiju, pa se stoga obvezno mora pokazati da se u navedenom slučaju takav hipergeometrijski red ne može pojaviti.
U preostalom dijelu mi se čini da d'Alembert nije odgovarajuće upotrebljavao beskonačne redove i da oni uopće nisu prikladni za zasnivanje temeljnog teorema teorije jednadžbi.

4. Od pretpostavke da X može zadobiti vrijednost S ali ne vrijednost U ne slijedi nužno da vrijednost T koja pada između S i U, X može dostići ali ne i prestići. Ovdje također imamo još jedan slučaj: naime može se dogoditi da postoji granica između S i U kojoj se X može približiti ma koliko blizu ali je ipak nikad neće doseći. Iz argumenata koje podastire d'Alembert slijedi samo to da X može premašiti bilo koju vrijednost koju bi dostigao pomoću konačnih veličina. Naime, kad X postane = S, on se može još uvijek povećati za neku konačnu vrijednost Ω; onda se može dodati novi prirast Ω', zatim novi prirast Ω'', itd. Tako, koliko god prirasta dodali, nijednog od njih ne možemo smatrati zadnjim, već uvijek možemo još nešto dodati. No, premda *broj* mogućih prirasta možda bude neograničen, ako se prirasti Ω, Ω', Ω'' itd. neprekidno smanjuju, može se dogoditi da suma $S + \Omega + \Omega' + \Omega''$ itd. unatoč tome nikad ne dosegne granicu, bez obzira koliko članova dodali.
Iako se taj slučaj ne može pojaviti kad X znači integralnu algebarsku funkciju od x, ipak, bez dokaza da se takav slučaj ne može dogoditi, razvoj se mora smatrati nekompletnim. U stvari, kad je X transcendentalna funkcija ili racionalna funkcija, može nastati takav slučaj, npr.

* Ovdje usput primjećujem da među tim redovima ima jako puno onih za koje se na prvi pogled čini da brzo konvergiraju, npr. velecijenjeni Euler u najvećoj mjeri ih koristi u posljednjem dijelu Inst. Calc. Diff., poglavlje VI, za aproksimiranje sume drugih redova, str.441-474 (preostali redovi, str. 475-478, su zaista konvergentni); nešto što, koliko znam, nitko do sada nije uočio. Stoga je jako poželjno da se jasno i strogo pokaže, zašto ti redovi, koji u početku konvergiraju brzo, pa poslije postepeno sve sporije i sporije, i konačno sve više i više divergiraju, mogu unatoč tome dati sumu vrlo blizu ispravne ako se ne uzme u obzir previše članova; te koliko na kraju takva suma može biti točna?

uvijek kad neka vrijednost X odgovara beskonačno velikoj vrijednosti od x. Stoga se d'Alembert-ov razvoj, čini se, ne može svesti na neupitne principe bez velikih ograda, a u nekim slučajevima i uopće.
Zbog tih razloga ne mogu uzeti d'Alembert-ov dokaz kao zadovoljavajući, unatoč tome što sama bit predmetnog dokaza nije dovedena u pitanje ovim prigovorima. Također vjerujem da se na tim istim temeljima (premda sa puno većom obazrivošću) može konstruirati puno stroži dokaz našeg teorema, i ne samo to, već se iz toga može dobiti sve ono što će trebati za teoriju transcendentalnih jednadžbi. Možda ću ovu tešku materiju obraditi jednom drugom zgodom. U međuvremenu usporedi čl.24. dolje.

7.

Nakon d'Alemberta, slavni je Euler objavio svoja istraživanja o ovoj stvari, *Recherches sur les racines imaginaires des équation, Hist. de l'Acad. de Berlin, A.1749, p 223 ff.* Euler je pružio dvostruki argument. Sažetak prvoga slijedi ovdje.
Prvo, Euler se laća dokazati: ako m označava bilo koju potenciju od 2, tada funkcija $x^{2m} + Bx^{2m-2} + Cx^{2m-3} + itd. + M = X$ (gdje je koeficijent drugog člana = 0) uvijek može biti rastavljena na dva realna faktora kod kojih x raste do m dimenzija. Za tu svrhu on pretpostavlja dva faktora $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} + \beta x^{m-3} + itd.$ i $x^m + ux^{m-1} + \lambda x^{m-2} + \mu x^{m-3} + itd.$ gdje su koeficijenti u, α, β, itd., λ, μ, itd. još nepoznati, te izjednačava njihov produkt sa funkcijom X. Usporedba koeficijenata daje $2m$-1 jednadžbi, i očito je potrebno samo dokazati da nepoznatim koeficijentima u, α, β, itd., λ, μ, itd. (čiji broj je također $2m$-1) mogu biti dane takve realne vrijednosti da mogu zadovoljiti te jednadžbe. Sada E. tvrdi: ako se na početku u smatra poznatom tako da broj nepoznanica bude za jedan manji od broja jednadžbi, tada α, β, itd., γ, δ, itd. sve mogu biti određene iz tih jednadžbi, kombiniranih po algebarskim pravilima, pomoću racionalnih operacija i bez korjenovanja, pomoću u i koeficijenata B, C, itd. ; i zaista one će biti realne dokle god je u realno. Nadalje α, β, itd., λ, μ, itd. sve sigurno mogu biti eliminirane, što će rezultirati jednadžbom $U = 0$ gdje će U biti integralna funkcija samo od u i poznatih koeficijenata. Rješavanje te jednadžbe pomoću uobičajenih metoda eliminacije bio bi ogroman zadatak kad je pretpostavljena jednadžba $X = 0$ nešto višeg stupnja; a kad je neodređenog stupnja bilo bi to jasno nemoguće (kao što i sam E. naglašava, str.239).
Međutim ovdje je dovoljno znati jedno svojstvo te jednadžbe, naime da je zadnji član u U (koji ne sadrži u) nužno negativan, odakle slijedi, kako je dobro poznato, da jednadžba ima barem jedan realan korijen, ili da u i slijedom toga α, β, itd., γ, δ, itd. mogu biti određeni kao relni brojevi na barem jedan način. To svojstvo se zaista može dokazati slijedećim razmatranjem: ako se pretpostavi da je $x^m - ux^{m-1} + \alpha x^{m-2} itd.$ faktor funkcije X, tada će u biti nužno suma m korijena jednadžbe $X = 0$, i on će moći imati upravo toliko mnogo vrijednosti na koliko različitih načina može m biti izabrano od $2m$ korijena ili, prema principima računa kombinatorike, $\dfrac{2m\cdot(2m-1)\cdot 2(m-2)\cdot\ldots\cdot(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}$ vrijednosti. Taj broj je uvijek dvostruki neparan broj (ispuštam ovdje dokaz koji nije težak); ako stavimo da je = $2k$, tada će njegova polovica k biti neparna. Jednadžba $U = 0$ će zaista biti stupnja $2k$. No pošto u jednadžbi $X = 0$ nema drugog člana, suma svih $2m$ korijena bit će 0. Stoga je jasno, ako je suma bilo kojih m korijena +p, tada suma preostalih korijena mora biti $-p$, t.j. ako je $+p$ među vrijednostima od u, tada će također biti i vrijednost $-p$. Stoga E. zaključuje da je u produkt k takvih dvostrukih faktora kao $u \cdot u - p \cdot p$, $u \cdot u - q \cdot q$, $u \cdot u - r \cdot r$ itd. gdje $+p$, $-p$, $+q$, $-q$, itd. označavaju svih $2k$ korijena jednadžbe $U = 0$. Zbog neparnog broja tih faktora, posljednji član od U će stoga biti kvadrat produkta $p \cdot q \cdot r$ itd. sa negativnim predznakom. No taj produkt $p \cdot q \cdot r$ itd. može

uvijek biti izračunat pomoću racionalnih operacija od koeficijenata B, C, itd. i stoga je nužno realan broj. Slijedom toga njegov kvadrat, koji ima negativam predznak, će sigurno biti negativna veličina. Kraj dokaza.

Pošto ta dva realna faktora od X imaju stupanj m, a m je potencija od 2, svaki od njih može na isti način biti rastavljen ponovo na dva realna faktora stupnja $\frac{1}{2}m$. Pošto će se ponavljanjem raspolavljanja broja m konačno nužno stići do binarnog člana, očigledno je da će nastavljanjem te operacije funkcija X konačno biti rastavljena na realne faktore drugog stupnja. No ako bi pretpostavili takvu funkciju kojoj ne nedostaje drugi član, npr. $x^{2m} + Ax^{2m-1} + Bx^{2m-2} + itd. + M$, gdje je $2m$ još uvijek binarna potencija, tada će ta funkcija supstitucijom $x = y - \frac{A}{2m}$ biti transformirana u sličnu funkciju bez drugog člana. Stoga jednostavno slijedi da je i takva funkcija također rastavljiva u realne faktore drugog stupnja. Konačno, pretpostavimo funkciju stupnja n gdje broj n nije binarna potencija. Tada možemo pretpostaviti najbližu binarnu potenciju veću od n, $=2m$, i možemo pomnožiti pretpostavljenu funkciju sa kojih god $2m - n$ jednostavnih realnih faktora. Slijedi bez teškoća, zbog rastavljivosti tog produkta u realne faktore drugog stupnja, da pretpostavljena funkcija također može biti rastavljena u faktore drugog ili prvog stupnja.

8.

Protiv ovog dokaza postavljam slijedeće primjedbe:

1. Pravilo po kojem E. zaključuje da se $2m - 2$ nepoznatih veličina α, β, itd., λ, μ, itd. može izračunati iz $2m - 1$ jednadžbi pomoću racionalnih operacija, nikako nije istinito u općem slučaju, već vrlo često ima iznimaka. Ako se uzme, npr. u članku 3., jedna od nepoznanica kao poznata i onda pokuša izraziti druge veličine pomoću nje i zadanih koeficijenata putem racionalnih operacija, brzo bi se otkrilo da je to nemoguće. Ni jedna od nepoznatih veličina ne može biti određena drugačije nego preko jednadžbe stupnja $m - 1$. Prema onome što je rečeno ranije to mora slijediti nužno, kao što se to ovdje odmah može vidjeti. Međutim trebalo bi dobro promisliti ne bi li također, u ovom slučaju, za neke vrijednosti m stvar mogla biti takva da nepoznanice α, β, itd., λ, μ, itd. ne mogu biti određene iz u, B, C, itd. drukčije nego iz jednadžbe stupnja možda većeg od $2m$. Za poseban slučaj gdje je jednadžba $X = 0$ četvrtog stupnja, E. je izračunao racionalne vrijednosti koeficijenata iz u i zadanih koeficijenata. Može li se to zaista uraditi i u jednadžbama višeg stupnja zahtijeva barem daljnju analizu.

Nadalje, čini se vrijednim da dublje i općenitije ispitamo formule koje izražavaju α, β, itd. pomoću u, B, C, itd. putem racionalnih operacija. Namjeravam se pozabaviti tom materijom i drugom koja pripada teoriji eliminacije (ova materija ni u kom slučaju nije do kraja iscrpljena) puno temeljitije drugom zgodom.

2. Čak ako bi se dokazalo da formule mogu biti pronađene za jednadžbe bilo kojeg stupnja, pomoću kojih te veličine α, β, itd., λ, μ, itd. mogu biti izračunate iz B, C, itd. putem racionalnih operacija, ipak uistinu te formule mogu postati *neodređene* za neke određene dobro definirane vrijednosti koeficijenata B, C, itd. Na taj način ne samo da bi bilo nemoguće izračunati vrijednosti nepoznanica iz u, B, C, itd. putem racionalnih operacija, već u pojedinim slučajevima neće odista biti niti realnih vrijednosti α, β, itd., λ, μ, itd. koje bi odgovarale nekoj realnoj vrijednosti u. Za potvrdu ovoga upućujem čitatelja, zbog kratkoće, samoj Eulerovoj disertaciji, gdje je na str.256 u potpunosti razvijena jednadžba četvrtog

stupnja. Svatko će odmah vidjeti da formule za koeficijente *α, β*, itd. postaju neodređene kad je $C = 0$ i kad se vrijednost 0 pretpostavi za u. Tada se vrijednosti onih koeficijenata ne mogu dobiti bez korjenovanja, i oni čak nisu niti realni brojevi kad je veličina $BB - 4D$ negativna. Svakako, u ovom slučaju u još uvijek ima realne vrijednosti kojima odgovaraju realne vrijednosti *α, β*, kao što je lako vidljivo. Uz to treba se bojati da će za jednadžbe većeg stupnja rješenje ove teškoće (koje E. nije uopće dotakao) uzrokovati puno više rada. U egzaktnom dokazu se zasigurno preko ove materije ne smije prijeći u tišini.

3. E. prešutno pretpostavlja da jednadžba $X = 0$ ima $2m$ korijena i da je njihova suma = 0 jer X nema drugog člana. Ono što ja mislim o toj slobodi (koju svi autori koriste kao argument) objasnio sam u članku 3. iznad. Pretpostavka da je suma svih korijena bilo koje jednadžbe jednaka prvom koeficijentu sa suprotnim predznakom, ne čini se primjenjivom na sve jednadžbe već samo na one koje imaju korijene. Budući da se ovim dokazom mora pokazati da jednadžba $X = 0$ zaista ima korijene, uopće se ne čini da je dozvoljeno prepostaviti njihovu egzistenciju. Nema sumnje, oni koji još nisu pronikli pogrešnost ovog paralogizma odgovorit će *da ovdje ne treba dokazati da* jednadžba $X = 0$ *može biti zadovoljena* (jer to je značenje izraza „imati korijene“) *nego samo smije biti popunjena vrijednostima x oblika* $a + b\sqrt{-1}$. Međutim, drugi oblici veličina izvan realnih i imaginarnih brojeva $a + b\sqrt{-1}$ ne mogu biti shvatljivi. I stoga se ne vidi jasno na koji se način ono što treba biti dokazano može razlikovati od onog što se pretpostavlja kao aksiom. Da je moguće smisliti još neki oblik veličina, recimo oblike *F*, *F'*, *F"*, itd, i tada još uvijek ne bismo bili dužni bez dokaza prihvatiti da će bilo koja jednadžba biti zadovoljena vrijednošću x koja je realna, ili koja je oblika $a + b\sqrt{-1}$, ili oblika *F*, ili *F'* itd. Iz razloga jer taj aksiom ne može imati drugo značenje do ovo: neka jednadžba može biti zadovoljena nekom nepoznatom realnom vrijednošću, ili imaginarnom vrijednošću oblika $a + b\sqrt{-1}$, ili možda nekom vrijednošću do sada nepoznatog oblika, ili vrijednošću koja nema nikakvog oblika. No sigurno se ne može razumjeti, sa jasnoćom koja se zahtijeva u matematici, kako veličine takve prirode, o kojima se ne može imati nikakve predodžbe, mogu biti zbrajane i množene. One su samo sjenke sjenki*.

Međutim, ovim primjedbama ja ne bih htio učiniti sumnjivim daljnje zaključke koje je E. izveo iz svoje pretpostavke. Dapače, siguran sam da bi se mogli izvesti na način niti težak niti vrlo različit o Eulerovog, tako da ne preostane ni najmanja dvojba. Ja sam samo kudio *formu* koja može zaista biti vrlo korisna za *otkrivanje* novih teorema ali čini se teško prihvatljiva kao *dokaz* za druge.

4. E. ne daje uopće ništa za dokaz tvrdnje da se produkt $p \cdot q \cdot r$ itd. može odrediti iz koeficijenata od X putem *racionalnih operacija*. Sve što o tome kaže, za jednadžbe četvrtog stupnja, je ovo (gdje su *a, b, c, d* korijeni pretpostavljene jednadžbe $x^4 + Bx^2 + Cx + D = 0$):
„Bez sumnje moći će se staviti primjedba da sam ovdje pretpostavio veličinu $p \cdot q \cdot r$ kao realan broj i njen kvadrat $pp \cdot qq \cdot rr$ kao pozitivan. No moglo bi biti sumnjivo, promatrajući

---

* Ova cjelokupna materija će biti opširno objašnjena u drugom ispitivanju koje je već u tisku, a koje se bavi vrlo različitom premda analognom temom. Tamo sam se možda mogao poslužiti sličnom slobodom i istim pravom kao što su to sa jednadžbama činili i svi drugi matematičari. Pomoću takvih fikcija bilo je moguće u par riječi dati dokaze za nekoliko tvrdnji. Pokazalo se da je bez njih to bilo prilično teško i da je zahtijevalo dosta umijeća. No radije sam se od tih fikcija u cijelosti suzdržavao, i očekujem da će mi to činiti veće zadovoljstvo nego da slijedim metode drugih matematičara.

korijene *a, b, c*, da nisu možda imaginarni brojevi; te bi se onda moglo dogoditi da kvadrat od $p \cdot q \cdot r$, od kojih je sastavljen, postane negativan. Na ovo odgovaram da taj slučaj nikad neće nastupiti. Jer ako su neki od korijena *a, b, c* imaginarni brojevi, mi unatoč tome znamo da mora biti $a + b + c + d = 0$, $ab + ac + ad + bc + bd + cd = B$,
$abc + abd + acd + bcd = -C$*, $abcd = D$, gdje su veličine *B, C, D* realni brojevi. No pošto je $p = a + b$, $q = a + c$, $r = a + d$, njihov produkt $pqr = (a + b)(a + c)(a + d)$ je odrediv, *kao što znamo*, iz veličina *B, C, D* i on će slijedom toga biti realan broj, što je u stvari $pqr = -C$ i $ppqqrr = CC$, upravo kako smo vidjeli. Jednako tako lako se može vidjeti da se mora dogoditi isti slučaj i u jednadžbama višeg stupnja i da mi se ne može načiniti primjedba s te strane."

Uvjet da produkt *pqr* može biti određen iz *B, C*, itd. putem racionalnih operacija Euler nije nigdje pridodao ali se čini da ga je cijelo vrijeme imao na umu, jer bez njega sam dokaz nema snagu. Sigurno je istina da se u jednadžbama četvrtog stupnja dobiva $aa(a + b + c + d) + abc + abd + acd + bcd = -C$ razvojem produkta $(a + b)(a + c)(a + d)$. Međutim ne čini se dovoljno jasno kako se taj produkt može izračunati iz koeficijenata, putem racionalnih operacija, u svim jednadžbama višeg stupnja. Slavni de Foncenex, koji je ovo prvi uočio *(Miscell. phil. Math. Soc. Taurin. T.I.p.117.)*, tvrdi ispravno da postupak gubi svu snagu bez strogog dokaza te pretpostavke. On priznaje da mu se čini da je takav dokaz prilično težak i govori kako je uzalud pokušavao doći do njega**.

Ipak je ova stvar riješena bez teškoća slijedećom metodom (koju ću ovdje dati samo sažeto). Premda u jednadžbama četvrtog stupnja nije dovoljno jasno da je produkt $(a + b)(a + c)(a + d)$ odrediv pomoću koeficijenata *B, C, D*, ipak se lako uočava da je taj produkt također $= (b + a)(b + c)(b + d)$, i uz to $= (c + a)(c + b)(c + d)$, i konačno $= (d + a)(d + b)(d + c)$. Stoga će produkt *pqr* biti jedna četvrtina zbroja $(a + b)(a + c)(a + d) + (b + a)(b + c)(b + d) + (c + a)(c + b)(c + d) + (d + a)(d + b)(d + c)$, koji će, kad se izračuna, biti racionalna integralna funkcija korijena *a, b, c, d* takve vrste u kojoj svi članovi ulaze na isti način kao što se to može unaprijed vidjeti bez teškoća. Takve se funkcije mogu zaista izraziti pomoću koeficijenata jednadžbe čiji su korijeni *a, b, c, d* .

Isto je također očito kad se produkt *pqr* dovede u ovaj oblik:
$\frac{1}{2}(a+b-c-d)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b-d)\cdot\frac{1}{2}(a+d-b-c)$, i lako se unaprijed vidi da će, kad se izračuna, uključivati sve *a, b, c, d* na isti način. Istodobno će iskusni matematičari iz ovoga zaključiti kako se ova metoda može primjeniti na jednadžbe višeg stupnja. Ostavljam za drugu prigodu kompletno izlaganje ovog dokaza, jer sažetost ne dozvoljava da se to sad učini, zajedno sa potpunijim istraživanjem funkcija koje na isti način uključuju više varijabli.

Nadalje primjećujem da osim te četiri primjedbe, u Eulerovom dokazu i neka druga mjesta isto mogu biti podvrgnuta kritici. Dokaz u onakvom obliku kako ga je Euler prikazao ni na koji način se ne može smatrati kompletnim.

Nakon ovog dokaza Euler štoviše pokazuje drugi način kako reducirati teorem, za jednadžbe čiji stupanj nije binarna potencija, na rješenje jednadžbi prethodno spomenute vrste: no kao

---

* Euler pogrešno daje *C*, odakle kasnije također netočno stavlja $pqr = C$.

** Čini se da se potkrala greška u tom izlaganju. Na str.118,1.5, umjesto slova p (*on choisissoit seulement celles où entroit p* itd.) potrebno je čitati *une même racine quelconque de l' équation proposée*, ili nešto slično jer drukčije nema smisla.

što nas posljednja metoda nije ništa naučila o jednadžbama čiji stupanj je binarna potencija, nije potrebno ni da ovu nadugačko ovdje objašnjavam, tim više jer je jednako podložna svim primjedbama (osim četvrte) kao i prvi, opći dokaz.

9.

U istoj raspravi Euler je nastojao dokazati naš teorem na još jedan način (str.263) čija je bit sadržana u slijedećem. Za datu jednadžbu $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} itd. = 0$, zaista do sada nije bilo moguće naći analitički izraz za njene korijene ako je $n > 4$. No još uvijek se čini sigurnim (kao što Euler tvrdi) da takav analitički izraz ne može sadržavati ništa drugo doli aritmetičke operacije i korjenovanje, što će biti sve kompliciranije što je veće n. Ako se to dopusti, Euler pokazuje vrlo lijepo da, kako god komplicirano korijeni bili izmiješani, ipak će se vrijednost formule uvijek moći predstaviti u obliku $M + N\sqrt{-1}$, gdje su M, N realne veličine.

Protiv takvog umovanja može se dati primjedba da je nakon toliko mnogo rada velikih matematičara ostalo vrlo malo nade da će se ikada doći do općeg rješenja za algebarske jednadžbe. Čini se sve vjerojatnijim da je takvo rješenje posve nemoguće i proturječno. To se ne mora uopće smatrati paradoksalnim, *jer ono što se uobičajeno naziva rješenje jednadžbe nije zaista ništa drugo nego njeno svođenje na čiste jednadžbe*. Jer ovdje se ne uče rješenja čistih jednadžbi već se ona pretpostavljaju; i ako izrazite korijene jednadžbe $x^m = H$ sa $\sqrt[m]{H}$, nikako je niste riješili, i niste učinili ništa više nego da ste smislili neki simbol da označite korijen jednadžbe $x^h + x^{h-1} + itd. = 0$ i stavili da je korijen jednak tome. Istina je da se čiste jednadžbe jako ističu među ostalim zbog jednostavnosti nalaženja njihovih korijena pomoću aproksimacija, i zbog lijepog odnosa među korijenima. Stoga ne treba braniti matematičarima da označavaju njihov korijen posebnim simbolom: ali iz činjenice da je tom simbolu podignuta vrijednost, te je obuhvaćen pod imenom *analitički izraz* , kao što su aritmetički simboli zbrajanja, oduzimanja, množenja, dijeljenja i potenciranja, uopće ne slijedi da se korijeni kakve god jednadžbe mogu izraziti pomoću njih, osim ako nije prešutno pretpostavljeno, bez dovoljnog razloga, da se rješenje bilo koje jednadžbe može svesti na rješenje čistih jednadžbi. Možda nije tako teško posve strogo pokazati tu nemogućnost već kod petog stupnja; ja ću izvijestiti potpunije o mojim istraživanjima o tome na drugom mjestu. Ovdje je dovoljno to da je opće rješenje jednadžbi, uzeto u navedenom smislu, zasad veoma upitno. I dokaz, čija snaga ovisi u cijelosti o toj pretpostavci, nema težinu.

10.

Kasnije je slavni de Foncenex bio uočio nedostatak Eulerovog prvog dokaza (iznad, članak 8., primjedba 4.) ali ga nije bio u stanju ukloniti. Stoga je pokušao drugim putem te je to objavio u svojoj hvaljenoj raspravi, str.120*. On se sastoji u slijedećem.

Neka je data jednadžba $Z = 0$ gdje Z označava neku funkciju stupnja m, od varijable z. Ako je m neparan broj onda je dobro poznato da ta jednadžba ima realni korijen; ako je međutim m paran tada Foncenex pokušava dokazati da jednažba ima barem jedan korijen oblika $p + q\sqrt{-1}$, na slijedeći način. Neka je $m = 2^n \cdot i$ gdje i označava paran broj, i neka se pretpostavi da je $zz + uz + M$ djelitelj funkcije Z.

---

* Drugi svezak navedenog Miscelleanorum, str. 337, sadrži objašnjenja za ovu raspravu. No tamo nije predmet ovo istraživanje već ta rasprava govori o logaritmima negativnih veličina.

Onda će pojedine vrijednosti u biti sume korijena jednadžbe $Z = 0$ uzete u parovima (sa zamijenjenim predznacima). Stoga će u imati $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} = m'$ vrijednosti. I ako se pretpostavi da je u određeno jednadžbom $U = 0$ (gdje U označava neku funkciju od u i od poznatih koeficijenata iz Z), onda će ta jednadžba biti stupnja m'. Sasvim lako se vidi da će m' biti broj oblika $2^{n-1}\cdot i'$, gdje je i' neki neparan broj. Ako m' još nije neparan, pretpostavimo da je $u\cdot u + u'\cdot u + M'$ djelitelj od U. Jasno je, pomoću sličnog umovanja, da je u' određeno jednadžbom $U' = 0$, gdje je U' funkcija od u' stupnja $\frac{m'(m'-1)}{1\cdot 2}$. Stavljajući $\frac{m'(m'-1)}{1\cdot 2} = m''$, m'' će onda biti neki broj oblika $2^{n-2}\cdot i''$, gdje i'' označava neki neparan broj. Ako m'' još nije neparan, i uzmemmo da je $u'\cdot u' + u''\cdot u' + M''$ djelitelj od U'' ; onda će u'' biti određeno jednadžbom $U'' = 0$. Ako nju uzmemo da je stupnja m''', onda će m''' biti neki broj oblika $2^{n-3}\cdot i'''$. Očigledno je da će u slijedu jednadžbi $U = 0$, $U' = 0$; $U'' = 0$ itd, n-ta jednadžba biti neparnog stupnja i stoga će imati realno rješenje. Stavljajući $n = 3$, zbog kratkoće, jednadžba $U'' = 0$ ima realni korijen u'', i bez teškoća se vidi da slično umovanje vrijedi za bilo koju vrijednost n. Slijedom toga, kaže Foncenex, koeficijent M'' se može izračunati pomoću u'' i koeficijenata iz U' (koje će biti integralne funkcije koeficijenata iz Z, što je lako vidjeti), ili pomoću u'' i koeficijenata iz Z, i stoga je realan. Odavde slijedi da će korijeni jednadžbe $u'u' + u''u' + M'' = 0$ biti sadržani u obliku $p + q\sqrt{-1}$; i ti će korijeni očito zadovoljavati jednadžbu equation $U' = 0$. Zato će svaka vrijednost u' biti oblika $p + q\sqrt{-1}$. Onda se koeficijent M' može izračunati (na isti način kao i prije) pomoću u' i koeficijenata iz Z i bit će također oblika $p + q\sqrt{-1}$. Stoga će korijeni jednadžbe $uu + u'u + M' = 0$ također biti tog oblika, i oni će sigurno zadovoljavati jednadžbu $U = 0$; t.j. ta jednadžba će imati korijen oblika $p + q\sqrt{-1}$. Konačno, odavde slično slijedi da će također i M, a sigurno i korijen jednadžbe $zz + uz + M = 0$, biti tog oblika; isto tako će taj korijen očigledno zadovoljavati datu jednažbu $Z = 0$, zbog čega će svaka jednadžba imati barem jedan korijen oblika $p + q\sqrt{-1}$.

11.

Primjedbe 1, 2, 3 koje sam dao protiv Eulerovog prvog dokaza (članak 8.), imaju istu snagu i protiv ove metode, ali s tom razlikom da druga primjedba, koju je trpio Eulerov dokaz samo u nekim posebnim slučajevima, pogađa ovaj dokaz u svim slučajevima. Jer može se izravno pokazati da će, kad god je dana formula koja izražava koeficijent M' pomoću u' i koeficijenata iz Z, ta formula nužno postati neodređena za nekoliko vrijednosti u'. Isto tako neka formula koja izražava koeficijent M'' pomoću u'' postat će neodređena za nekoliko vrijednosti u'' itd.
Ovo postaje vrlo jasno kad pretpostavimo na primjer neku jednadžbu četvrtog stupnja. Stavimo stoga $m = 4$, a korijeni jednadžbe $Z = 0$ neka su α, β, γ, δ. Tada je jasno da će jednadžba $U = 0$ biti šestog stupnja sa korijenima $-(\alpha+\beta)$, $-(\alpha+\gamma)$, $-(\alpha+\delta)$, $-(\beta+\gamma)$, $-(\beta+\delta)$, $-(\gamma+\delta)$. Jednadžba $U' = 0$, tada će biti petnaestog stupnja a vrijednosti u' ove: $2\alpha+\beta+\gamma$, $2\alpha+\beta+\delta$, $2\alpha+\gamma+\delta$, $2\beta+\alpha+\gamma$, $2\beta+\alpha+\delta$, $2\beta+\gamma+\delta$, $2\gamma+\alpha+\beta$, $2\gamma+\alpha+\delta$, $2\gamma+\beta+\delta$, $2\delta+\alpha+\beta$, $2\delta+\alpha+\gamma$, $2\delta+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Kod ove jednadžbe se mora stati jer je neparnog stupnja, i ona će zaista imati realni korijen $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ (koji će biti jednak prvom koeficijentu od Z sa suprotnim predznakom, i ne samo da će biti realan nego će biti i racionalan ako su koeficijenti od Z racionalni). No može se vidjeti bez teškoće: ako je dana neka formula koja izražava vrijednost M' preko odgovarajućih vrijednosti u' pomoću

racionalnih operacija, tada će ta formula nužno postati neodređena za $u' = \alpha + \beta + \gamma + \delta$. Jer će ta vrijednost biti tri korijena od $U' = 0$, i tome će odgovarati tri vrijednosti M', naime $(\alpha + \beta)(\gamma + \delta)$, $(\alpha+ \gamma)(\beta + \gamma)$ i $(\alpha+ \delta)(\beta + \delta)$ koji svi mogu biti iracionalni. No očito je da u tom slučaju racionalna formula ne može proizvesti niti neku iracionalnu vrijednost M', niti tri različite vrijednosti. Iz ovog primjera može se zadovoljavajuće zaključiti da Foncenexova metoda nije uopće zadovoljavajuća. U namjeri da se dade metoda, kompletna u svakom pogledu, mora se dapače puno dublje istražiti teorija eliminacije.

12.

Konačno, slavni LaGrange obrađuje naš teorem u svom radu S*ur la forme des racines imaginaires des équation, Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin 1772, str.222 i dalje.* Tu je taj veliki matematičar nastojao u prvom redu popraviti nedostatak Eulerovog prvog dokaza, i zaista je temeljito ispitao osobito ono što je sadržano u trećoj i četvrtoj primjedbi gore (članak 8.), tako da nije preostalo ništa što bih želio reći osim možda da se čini da je ostalo nekoliko sumnji u ranijoj raspravi o teoriji eliminacije (o kojoj ovo istraživanje potpuno ovisi). Međutim prvu primjedbu nije čak niti dotakao; štoviše cijela rasprava je sagrađena na pretpostavci da svaka jednadžba *m*-tog stupnja zaista ima korijene.

I tako, pažljivo razmatrajući dokaze koji su do sada bili objavljeni, nadam se da novi dokaz ovog najvažnijeg teorema, zasnovan na potpuno različitim temeljima, neće biti loše dočekan među stručnjacima te ću se odmah prihvatiti njegova objašnjenja.

13.

Lema: Neka *m* označava bilo koji pozitivni cijeli broj. Tada je funkcija
$\sin\varphi \cdot x^m - \sin m\varphi \cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi \cdot r^m$ djeljiva sa $xx - 2\cos\varphi \cdot rx + rr$.

Dokaz: Za $m = 1$, funkcija je $= 0$ i stoga djeljiva s bilo kojim faktorom. Za $m = 2$, kvocijent je $\sin\varphi$, a za svaku veću vrijednost kvocijent će biti
$\sin\varphi \cdot x^{m-2} + \sin 2\varphi \cdot rx^{m-3} + \sin 3\varphi \cdot rrx^{m-4} + itd. + \sin(m-1)\varphi \cdot r^{m-2}$. Lako je potvrditi da umnožak te funkcije pomnožen sa $xx - 2\cos\varphi \cdot rx + rr$ daje prvotnu funkciju.

14.

Lema: Ako su veličina r i kut φ tako određeni da vrijede jednadžbe

$$r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots + Krr\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \qquad (1)$$

$$r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots + Krr\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0 \qquad (2)$$

onda će funkcija $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Kxx + Lx + M = X$ biti djeljiva sa faktorom drugog stupnja $xx - 2\cos\varphi \cdot rx + rr$, samo ako $r\sin\varphi$ nije = 0. Ali ako je $r\sin\varphi = 0$ onda će funkcija biti djeljiva sa jednostavnim faktorom $x - r\cos\varphi$.

Dokaz: I. Kao u prethodnom članku, sve slijedeće veličine će biti djeljive sa
$xx - 2\cos\varphi \cdot rx + rr$:

$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi\cdot rx^m & -\sin m\varphi\cdot r^m x & +\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m+1}\\
A\sin\varphi\cdot rx^{m-1} & -A\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m-1}x & +A\sin(m-2)\varphi\cdot r^m\\
B\sin\varphi\cdot rx^{m-2} & -B\sin(m-2)\varphi\cdot r^{m-2}x & +B\sin(m-3)\varphi\cdot r^{m-1}\\
\quad\text{itd.} & & \text{itd.}\\
K\sin\varphi\cdot rxx & -K\sin 2\varphi\cdot rrx & +K\sin\varphi\cdot r^3\\
L\sin\varphi\cdot rx & -L\sin\varphi\cdot rx & \\
M\sin\varphi\cdot r & & +M\sin(-\varphi)\cdot r
\end{array}$$

Stoga će suma tih veličina također biti djeljiva sa $xx-2\cos\varphi\cdot rx+rr$. Prvi članovi tih veličina daju sumu $\sin\varphi\cdot rX$;drugi članovi zbrojeni zajedno daju 0 zbog (2); i zaista isto i suma trećih članova iščezava, kao što se lako vidi ako se pomnoži (1) sa $\sin\varphi$, (2) sa $\cos\varphi$ i oduzme jedan produkt od drugog. Stoga slijedi da je funkcija $\sin\varphi\cdot rX$ djeljiva sa $xx-2\cos\varphi\cdot rx+rr$ a isto tako i funkcija *X*, tako dugo dok $r\sin\varphi$ nije = 0. Kraj prvog dokaza.

II. No ako je $r\sin\varphi$ = 0, onda je ili *r* = 0, ili $\sin\varphi$ = 0. U prvom slučaju je *M* = 0 zbog (1), i stoga će *X* biti djeljiv sa *x* ili sa $x-r\cos\varphi$. U posljednjem slučaju $\cos\varphi=\pm1$, $\cos2\varphi=+1$, $\cos3\varphi=\pm1$ i općenito $\cos n\varphi=(\cos\varphi)^n$. Stoga će biti *X* = 0 zbog (1) kad se stavi da je $x=r\cos\varphi$, i slijedom toga će funkcija *X* biti djeljiva sa $x-r\cos\varphi$. Kraj drugog dokaza.

15.

Ovaj izvanredni teorem je često dokazivan uz pomoć imaginarnih brojeva, npr. Euler *Introd. In Anal. Inf. T.I. str.110.* Smatram vrijednim truda pokazati kako on može biti izveden bez njihove pomoći. Sasvim je očigledno da za dokaz našeg teorema nije potrebno ništa više nego pokazati da: *kad je data bilo koja funkcija X, oblika* $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+itd.+Lx+M$, *tada r i φ mogu biti određeni na takav način da jednadžbe (1) i (2) budu zadovoljene*. Jer odatle slijedi da *X* ima realni faktor prvog ili drugog stupnja. I onda dijeljenje daje nužno realni kvocijent nižeg stupnja koji će zbog istog razloga također imati faktor prvog ili drugog stupnja. Nastavljanjem tog postupka, *X* će konačno biti rastavljena u jednostavne faktore ili faktore drugog stupnja. Stoga je glavni cilj slijedećeg ispitivanja dokazati taj teorem.

16.

Razmotrimo jednu beskonačnu ravninu (ravna ploča, na sl.1) i na njoj jednu liniju *GC* kroz točku *C*. Izaberimo neku duljinu kao jediničnu tako da sve ravne linije mogu biti izražene u brojevima. U bilo kojoj točki *P* te ravnine, čija udaljenost od *C* je *r* a kut *GCP* = *φ*, podignimo okomicu čija duljina je jednaka izrazu

$r^m\sin m\varphi+Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi+itd.+Lr\sin\varphi$, koji ću zbog kratkoće nadalje označavati sa *T*. Udaljenost *r* ću uvijek uzimati kao pozitivnu, a za točke koje padaju na drugu stranu osi kut *φ* mora se uzimati uvećanim za dva prava kuta, ili negativnim (što je ista stvar). Krajnje točke tih okomica ležat će iznad ravnine za pozitivne vrijednosti *T*, ispod nje za negativne vrijednosti, a na samoj ravnini kad *T* iščezava; i one će biti na jednoj zakrivljenoj površini, neprekidnoj i u svim smjerovima beskonačnoj, koju ću zbog kratkoće od sada nadalje zvati *prva površina*.

Opet, na sličan način jedna druga površina može se staviti u odnos prema toj istoj ravnini, središtu i osi, koje će visina iznad bilo koje točke ravnine biti $r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + itd. + Lr\cos\varphi + M$, čiji ću izraz, zbog kratkoće, uvijek označavati sa *U*. Tu površinu, koja će također biti neprekidna i beskonačna u svim smjerovima, razlikovat ću od ranije površine pomoću izraza *druga površina*. Onda je očigledno da se cijeli zadatak sastoji u tome da se pokaže da postoji barem jedna točka koja leži istovremeno u ravnini, na prvoj površini i na drugoj površini.

17.

Može se lako vidjeti da prva površina leži djelomično iznad i djelomično ispod ravnine, jer je jasno da se može načiniti da udaljenost od središta bude tako velika da preostali članovi od *T* ne doprinose ništa u usporedbi sa prvim $r^m \sin m\varphi$; ali da taj može biti jednako tako pozitivan kao i negativan već prema tome kako je to određeno kutem *φ*. Stoga će prva površina nužno presijecati ravninu. Presjecište ravnine sa prvom površinom zvat ću *prva krivulja*, koja će stoga biti određena jednadžbom *T* = 0. Zbog istog razloga i druga površina će presijecati tu ravninu. Presjecište čini krivulju određenu jednadžbom *U* = 0, koju ću zvati *druga krivulja*. Posebno, svaka krivulja se sastoji od nekoliko grana koje općenito mogu biti odvojene, ali će svaka od njih biti kontinuirana krivulja. U stvari prva krivulja će uvijek biti onakva kakvu zovemo složenom, a os *GC* mora biti smatrana dijelom te krivulje, jer kakvu god vrijednost može poprimiti *r*, *T** će uvijek biti = 0 kad god je *φ* = 0 ili *φ* = 180°. No bolje ju je smatrati jednom krivuljom sastavljenom od svih grana koje prolaze bilo kojim točkama u kojima je *T* = 0 (prema općenito prihvaćenim pravilima upotebe u višoj matematici). I učinimo to isto sa svim granama koje prolaze bilo kojim točkama za koje je *U* = 0. Očigledno, zadatak je sada reduciran na to da se pokaže da na našoj ravnini postoji barem jedna točka gdje neka grana prve krivulje presijeca granu druge krivulje. Zato je imperativ pobliže istražiti prirodu tih krivulja.

18.

Prije svega, uočavam da su obje krivulje algebarske, i reda *m* ako se odnose na ortogonalne koordinate. Ako se sada pretpostavi ishodište u *C*, apscisa *x* uzeta u smjeru *G*, odgovarajući *y* prema *P*, tada je $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$ i stoga za svako n je:

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-1}y - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-4)}{1\cdot\ldots\cdot 5}x^{n-5}y^5 - itd.$$

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}yy + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 - itd.$$

Zbog toga će se *T* isto kao i *U* sastojati od nekoliko članova $ax^\alpha y^\beta$ gdje *α, β* označavaju pozitivne cijele brojeve čiji je zbroj najviše jednak *m*. Štoviše, lako je vidjeti da svi članovi od *T* sadržavaju *y*; Slijedom toga prva krivulja je u strogom smislu sastavljena od ravne linije (s jednadžbom *y* = 0) i krivulje reda *m* – 1, premda to razlikovanje ovdje nije potrebno uzeti u obzir.

Od veće važnosti bit će ispitivanje ima li prva krivulja, kao i druga, beskonačnih grana, koliko ih je mnogo i koje su vrste. Na beskonačnoj udaljenosti od točke *C* prva krivulja, čija je jednadžba $\sin m\varphi + \frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{rr}\sin(m-2)\varphi + itd. = 0$, će se podudarati sa krivuljom

---

*u izvorniku stoji *U*, no to mora biti *T* jer rečenica govori o prvoj krivulji (op.prev.)

čija je jednadžba $\sin m\varphi = 0$. Ovim se dobiva *m* ravnih linija koje se međusobno sijeku u točki *C**, od kojih je prva os *GCG'* dok su druge nagnute prema osi pod kutevima $\frac{1}{m}180^\circ$, $\frac{2}{m}180^\circ$, $\frac{3}{m}180^\circ$ itd. Zbog toga prva krivulja ima 2*m* beskonačnih grana koji dijele obod kruga beskonačnog polumjera u 2*m* jednakih dijelova, tako da će obod biti presječen prvom granom gdje se susreću kružnica i os, drugom granom na razmaku od $\frac{1}{m}180^\circ$, trećom na razmaku od $\frac{2}{m}180^\circ$ itd. Na isti način druga krivulja će imati asimptotu određenu jednadžbom $\cos m\varphi = 0$, na beskonačnoj udaljenosti od središta. Ta druga krivulja je sastavljena od *m* ravnih linija koje se međusobno sijeku u točki *C* pod istim kutevima na način da prva linija čini kut od $\frac{1}{m}90^\circ$ sa osi, druga $\frac{3}{m}90^\circ$, treća $\frac{5}{m}90^\circ$, itd. Zbog toga će druga krivulja također imati 2*m* beskonačnih grana, od kojih će svaka zauzeti prostor između dvije susjedne grane prve krivulje tako da one sijeku obod kruga beskonačnog polumjera u točkama koje se razlikuju od osi za $\frac{1}{m}90^\circ$, $\frac{3}{m}90^\circ$, $\frac{5}{m}90^\circ$ itd. Štoviše jasno je da sama os sačinjava dvije beskonačne grane prve krivulje, naime prve i (*m*+1)-te. Smještaj tih grana je prikazan na vidljiv način na sl.2, koje su konstruirane za slučaj *m* = 4, gdje su grane druge krivulje označene točkasto da se razlikuju od grana prve krivulje; to se također odnosi i na četvrtu sliku.**

Zato što su ovi zaključci zaista od najveće važnosti, i jer bi beskonačno velike veličine možda uvrijedile neke čitatelje, ja ću pokazati u slijedećim člancima kako se ti zaključci mogu izvesti i bez pomoći beskonačnog.

19.

Teorem. *Uza sve isto kao gore, oko* C *se može opisati krug na čijem obodu ima* 2m *točaka gdje je* T = 0, *i isto toliko gdje je* U = 0, *i to na takav način da ove druge točke leže pojedinačno između parova onih prvih.*

Ako je zbroj svih koeficijenata *A, B, C*, itd., *K, L, M* pozitivan i jednak *S*, i također $R > S\sqrt{2}$ i >1***, tada tvrdim da će ono što je rečeno u teoremu nužno važiti u krugu polumjera *R*. Drugim riječima; označimo zbog sažetosti sa (1) onu točku na obodu kruga koja je $\frac{1}{m}45$ stupnjeva udaljena od sjecišta kružnice i lijeve strane osi, ili za koju je $\varphi = \frac{1}{m}45^\circ$; slično sa

---

*U izvorniku stoji *A* no iz konteksta proizilazi da može biti jedino *C* (op.prev.)

**Četvrta slika je konstruirana uz pretpostavku X = x^4-2xx+3x+10, na kojoj čitatelji manje vični općim i apstraktnim istraživanjima mogu sagledati položaj obje krivulje u jednom konkretnom slučaju. Duljina CG je uzeta kao =10.

***Kad je $S > \sqrt{\frac{1}{2}}$, prvi uvjet uključuje drugi, kad je $S < \sqrt{\frac{1}{2}}$, drugi uvjet uključuje prvi.

(3) označimo točku koja je $\frac{3}{m}45^\circ$ udaljena od tog sjecišta, ili za koju je $\varphi = \frac{3}{m}45^\circ$; dalje sa (5) točku gdje je $\varphi = \frac{5}{m}45^\circ$ itd. sve do (*8m* - 1) koja je $\frac{8m-1}{m}45^\circ$ udaljena od sjecišta ako uvijek nastavljamo u smjeru tog dijela (ili $\frac{1}{m}45^\circ$ prema suprotnom dijelu). Pri tome će se na obodu dobiti ukupno 4*m* jednakomjerno rapoređenih točaka. Jedna točka će pasti između (8*m* – 1) i (1) za koje je $T = 0$, i sigurno će slične pojedinačne točke biti između (3) i (5), između (7) i (9), između (11) i (13) itd. Takvih ima 2*m*. Na isti način će pojedinačne točke, za koje je $U = 0$ padati između (1) i (3), (5) i (7), (9) i (11), itd. zbog čega je njihov broj također 2*m*. Konačno, na cijelom obodu neće biti nikakvih dugih točaka osim tih 4*m* točaka za koje je *T* ili $U = 0$.

Dokaz:
I. U točki (1), $m\varphi = 45^o$ i zato je

$$T = R^{m-1}\left(R\sqrt{\frac{1}{2}} + A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + itd. + \frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right).$$

Međutim, suma $A\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi + itd.$ ne može sigurno biti veća od *S* te je stoga nužno manja od $R\sqrt{\frac{1}{2}}$; odakle slijedi da je vrijednost od *T* u toj točki sigurno pozitivna.
Još važnije, *T* će slijedom toga imati pozitivnu vrijednost tako dugo dok $m\varphi$ pada između 45º i 135º, tj. od točke (1) do točke (3) vrijednost od *T* će biti pozitivna. Zbog istog razloga će *T* imati pozitivnu vrijednost od točke (9) do točke (11), i općenito od bilo koje točke (8*k* + 1) do (8*k* + 3) gdje *k* označava koji god cijeli broj. Slično tome, *T* će imati negativne vrijednosti svugdje između (5) i (7), između (13) i (15) itd. i općenito između (8*k*+5) i (8*k*+7), i sigurno nigdje u tim intervalima neće biti = 0. No zbog toga što je u (3) ta vrijednost pozitivna, u (5) negativna, ona će nužno biti = 0 negdje između (3) i (5); i sigurno između (7) i (9), između (11) i (13) itd. sve do uključujući interval između (8*m* – 1) i (1), tako da je $T = 0$ u ukupno 2*m* točaka. Kraj prvog dokaza.

II. Osim tih 2*m* točaka, kao što se može vidjeti, nema drugih sa tim svojstvom; pošto nema nijedne između (1) i (3), (5) i (7), itd, takve točke ne mogu postojati nikako drukčije nego da u nekom intervalu između (3) i (5), ili između (7) i (9) itd. leže barem dvije. Tada će *T* nužno biti neki maksimum ili minimum u tom istom intervalu i stoga će biti $\frac{dT}{d\varphi} = 0$. No $\frac{dT}{d\varphi} = mR^{m-2}\left(R\cos m\varphi + \frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi + itd.\right)$, a $\cos m\varphi$ je uvijek negativan između (3) i (5), i $> \sqrt{\frac{1}{2}}$ *. Odatle se lako vidi da je u cijelom tom intervalu $\frac{dT}{d\varphi}$ negativan; slično tome pozitivan svugdje između (7) i (9), negativan između (11) i (13) itd, tako da ne može biti 0 u niti jednom od tih intervala, i stoga se ta pretpostavka ne može održati. Stoga itd. Kraj drugog dokaza.

---

* U Gaussovo vrijeme $\sqrt{\frac{1}{2}}$ je predstavljao ±0,707 (op.prev.)

III. Opet, na sličan način se dokazuje da je U negativno svugdje između (3) i (5), (11) i (13) itd, i općenito između (8k + 3) i (8k + 5), ali pozitivno između (7) i (9), (15) i (17) itd. i općenito između (8k + 7) i (8k + 9). Odatle neposredno slijedi da U mora postati = 0 negdje između (1) i (3), između (5) i (7) itd, tj. u $2m$ točaka. Opet, niti u jednom od tih intervala ne može biti $\frac{dU}{d\varphi} = 0$ (što je lako dokazati na isti način kao gore); zbog čega postojanje više od $2m$ točaka na obodu kruga, za koje je $U = 0$, neće biti moguće. Kraj trećeg dokaza i kraj dokaza.

Štoviše, dio teorema prema kojem ne postoji više od $2m$ točaka za koje je $T = 0$, niti postoji više od $2m$ točaka za koje je $U = 0$, može se također dokazati na osnovu činjenice da jednadžbe $T = 0$, $U = 0$ opisuju krivulje reda m koje se sa kružnicom kao krivuljom reda 2 ne mogu sjeći u više od $2m$ točaka kao što je to ustanovljeno u višoj matematici.

20.

Ako se oko istog središta opiše druga kružnica radijusa većeg od R i ona se podijeli na isti način, tada će na toj kružnici po jedna točka za koju je $T = 0$ pasti između točaka (3) i (5) kao i između (7) i (9) itd. Lako je vidjeti da što se manje razlikuje radijus te kružnice od radijusa R, to su međusobno bliže odgovarajuće točke između (3) i (5) na objema kružnicama. Isto će se dogoditi kad se opiše kružnica nešto manjeg radijusa od R ali većeg od $S\sqrt{2}$ i 1. Odatle se može bez teškoća uočiti da kružnicu radijusa R zaista presijeca neka grana krivulje u točki između (3) i (5) za koju je $T = 0$; a isto vrijedi za druge točke za koje je $T = 0$. Na isti način je jasno da će tu kružnicu presijecati neka grana druge krivulje u svih onih $2m$ točaka za koje je $U = 0$. Ti zaključci se mogu također iskazati i na slijedeći način. Kad se oko središta C nacrta krug tražene veličine tada će $2m$ grana prve krivulje i isto toliko grana druge krivulje ulaziti u taj krug na takav način da će se između svake dvije sukcesivne grane prve krivulje nalaziti neka grana druge krivulje. Vidi sl.2 gdje krug nije beskonačne nego konačne veličine. Brojeve koji su dodani pojedinim granama ne treba brkati sa brojevima kojima sam, u ovom i prethodnim člancima, označavao određena presjecišta na obodu.

21.

Već prema relativnom smještaju grana koje ulaze u krug može se na mnogo načina zaključiti da unutar tog kruga nužno mora biti presjecišta nekih grana prve krivulje sa nekim granama druge krivulje, i teško je odlučiti koju metodu izabrati da se to pokaže. Najspretnijom se čini slijedeća. Označimo sa 0 (sl.2) točku na obodu kruga ondje gdje se siječe sa lijevom stranom osi (koja je i sama jedna od $2m$ grana prve krivulje); najbližu točku gdje ulazi grana druge krivulje sa 1; njoj najbližu točku gdje ulazi druga grana prve krivulje sa 2, i tako dalje sve do $4m - 1$. Tako neka grane prve krivulje ulaze u krug kod svake točke označene parnim brojem, dok grane druge krivulje neka ulaze kod točaka predstavljenih neparnim brojem. No prema višoj matematici, svaka algebarska krivulja (ili pojedini dio takve algebarske krivulje, ako se ona možda sastoji od više dijelova) ili se vraća u sebe ili se nastavlja u beskonačnost.

Slijedom toga grana bilo koje algebarske krivulje koja ulazi u neki ograničeni prostor mora nužno negdje iz njega i izaći.* Iz ovoga se lako dade zaključiti da bilo koja točka označena parnim brojem (ili kratko, bilo koja parna točka) mora unutar kruga biti spojena sa drugom parnom točkom pomoću grane prve krivulje, i slično tome bilo koja točka označena neparnim brojem sa odgovarajućom točkom pomoću grane druge krivulje. Sada, iako spoj takve dvije točke može jako varirati shodno prirodi funkcije X, tako da općenito ne može biti jasno opisan, ipak je lako dokazati *da se presjecište prve krivulje sa drugom uvijek događa, neovisno o kakvom spoju se u konačnici radi*.

22.

Čini se da je dokaz da se to nužno događa najpogodnije dati indirektno. Pretpostavimo da se spoj bilo koje dvije parne točke i bilo koje dvije neparne točke može načiniti na takav način da to ne rezultira presjecištem grane prve krivulje sa granom druge krivulje. Pošto je os dio prve krivulje, točka 0 je očito spojena sa točkom $2m$. Točka 1 ne može stoga biti spojena sa bilo kojom točkom iza osi, tj. sa bilo kojom točkom označenom brojem većim od $2m$, jer bi inače spojna krivulja nužno sjekla os. Ukoliko se pretpostavi da je 1 spojeno sa točkom n, onda će n biti $<2m$. Zbog sličnog razloga, ako se postavi da je 2 spojeno sa n', tada će biti $n'<n$, jer bi inače grana $2...n'$ nužno sjekla granu $1...n$. Zbog istog razloga točka 3 će biti spojena sa jednom od točaka koje padaju između 4 i n'; i očito kad se uzme da su 3, 4, 5 itd. spojene sa n'', n''', n'''' itd. tada n''' pada između 5 i n'', n'''' između 6 i n''' itd. Odatle je očigledno da će se na kraju doći do neke točke h spojene sa točkom $h + 2$, i tada će grana koja ulazi u krug u točki $h + 1$ nužno sjeći granu koja spaja točke h i $h + 2$. No pošto jedna od te dvije grane pripada prvoj krivulji, druga drugoj krivulji, očigledno je da je pretpostavka proturječna i da zaista negdje nužno postoji presjecište prve krivulje i druge krivulje.

Kad se ovo sve poveže sa prethodnim, može se iz svih izloženih ispitivanja zaključiti da je teorem dokazan sa punom strogošću, tj. *da svaka algebarska racionalna cijela funkcija jedne varijable može biti rastavljena na realne faktore prvog ili drugog stupnja*.

---

* Čini se da je sa dovoljnom sigurnošću dokazano da algebarska krivulja ne može biti nigdje iznenada prekinuta (kao što se to događa sa npr. sa transcendentnom krivuljom čija je jednadžba $y = \frac{1}{\ln x}$) niti se može izgubiti, da kažemo tako, u nekoj točki nakon beskonačno mnogo zavoja (kao kod logaritamske spirale). Koliko znam do sada nitko nije ovo doveo u sumnju. Zahtijeva li to međutim netko, ja ću se jednom prigodom potruditi da dam dokaz toga, da ne bude razloga ikakvoj sumnji. U predmetnom slučaju to je zaista očito. Pretpostavimo da neka grana, npr.2, nigdje ne izlazi iz kruga (sl.3). Tada se može ući u krug između 0 i 2, nakon čega se može ići oko te cijele grane (koja će se izgubiti unutar prostora kruga), i konačno izaći ponovo iz kruga između 2 i 4 tako da na tom cijelom putu neće nigdje biti presječena prva krivulja. Da je to zaista apsurdno jasno je iz činjenice da se iznad točke gdje se ušlo u krug nalazi prva površina, a gdje se izašlo ona je ispod. Stoga se nužno mora negdje naići na samu prvu površinu, tj. na točku prve krivulje. Ipak, ovim umovanjem temeljenim na načelima geometrije položaja, čija načela nisu ništa manje istinita nego ona geometrije veličina, slijedi samo toliko: ako se uđe u krug po nekoj grani prve krivulje, onda se može izaći iz kruga na nekom drugom mjestu ostajući uvijek na toj prvoj krivulji. Ne slijedi međutim da je cijela putanja jedna kontinuirana krivulja u smislu koji se podrazumijeva u višoj matematici, no za ovu priliku je dovoljno da je putanja kontinuirana u običnom smislu, tj. nigdje nije prekinuta i nigdje se ne cijepa.

23.

Štoviše, na tim osnovama nije teško zaključiti da će biti ne samo jedno nego barem *m* presjecišta prve krivulje sa drugom, premda se također može dogoditi da prvu krivulju presijeca nekoliko grana druge krivulje u istoj točki. U tom slučaju funkcija *X* će imati nekoliko istih faktora. No pošto je ovdje dovoljno da se dokaže nužnost samo jednog presjecišta, ja se neću, zbog kratkoće, više zadržavati na ovoj materiji. Zbog istog razloga neću ovdje potpunije istraživati druga svojstva tih krivulja, tj. da su presjecišta uvijek pod pravim kutem; ili ako se nekoliko grana jedne i druge krivulje susreće u istoj točki onda će biti jednako toliko grana prve krivulje koliko i druge krivulje, one će biti izmjenično smještene i sjeći će jedna drugu pod istim kutem itd.

Konačno primjećujem da uopće nije nemoguće načiniti prethodni dokaz, koji sam ja ovdje sagradio na geometrijskim načelima, u čistom analitičkom obliku. No vjerujem da je prikaz koji sam ovdje dao puno manje apstraktan; i da sam ovdje dao samu srž onoga što treba biti dokazano, očima puno jasnije nego bi se to moglo očekivati od analitičkog dokaza.

Pred kraj, kratko ću još navesti drugu metodu za dokazivanje našeg teorema, koja se na prvi pogled čini sasvim različitom ne samo od prethodnog dokaza već i od drugih dokaza detaljno opisanih gore, a koja je ipak u strogom smislu ista kao d'Alembertova ako se gleda u osnovnim crtama. Predajem stručnjacima, zbog kojih tu metodu i dodajem, da je usporede sa njegovom i da istraže paralelizam među njima.

24.

Iznad ravnine sa sl.4 pretpostavimo, relativno prema osi *CG* i fiksnoj točki, prvu i drugu površinu na isti način kao i prije. Uzmimo neku točku na nekoj od grana prve krivulje za koju je T = 0, (npr. neku točku *M* na osi). Ako kod te točke *U* nije isto = 0, nastavimo dalje po prvoj krivulji prema onom dijelu u čijem smjeru apsolutna vrijednost od *U* opada. Ako slučajno kod točke *M* apsolutna vrijednost od *U* opada u oba smjera onda nije važno u kome smjeru se krećemo. Pokazat ću što treba učiniti i ako *U* raste u oba smjera. Očigledno je da ćemo, ako stalno napredujemo po prvoj krivulji, nužno doći do točke kod koje je konačno U = 0, ili do takve točke gdje vrijednost od *U* poprima minimum, tj. do točke *N*. U prvom slučaju smo našli što smo tražili; u posljednjem slučaju se međutim može dokazati da se u toj točki siječe nekoliko grana prve krivulje (naravno paran broj njih). Njihove polovice su posložene tako da se vrijednost od *U* kontinuirano smanjuje u koju god polovicu nove grane skrenuli (u jednu ili u drugu). (Moram, zbog kratkoće, izostaviti dokaz ovog teorema koji nije toliko težak koliko je dugačak.) Po toj novoj grani se dalje opet može napredovati dok *U* ne postane = 0 (kao što se događa na sl.4 kod *P*) ili dok ponovo ne poprimi minimum. Kad se opet skrene, u konačnici će se nužno jednom stići do točke gdje je $U = 0$.

Protiv ovog dokaza se može iskazati sumnja. Može se dogoditi, kako god daleko napredovali i koliko god se vrijednost od *U* smanjivala, da to smanjivanje postaje sve sporije i da ta vrijednost jednako tako možda nigdje ne dostigne neku graničnu vrijednost; ta primjedba odgovara onoj četvrtoj u članku 6. No nije teško odrediti neku takvu granicu da se, čim ju se prijeđe, vrijednost od *U* ne mora nužno mijenjati sve brže, već se također ne mora ni dalje smanjivati, već se vrijednost 0 mora nužno pojaviti čak i prije nego se stigne do te granice. Zadržavam za sebe da drugom prilikom nastavim dalje s ovom materijom i svim drugim što sam samo mogao dotaći ovim dokazom.

Fig. 1.

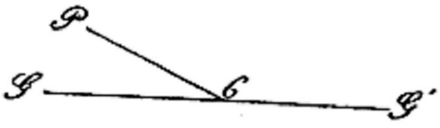


Fig. 2.

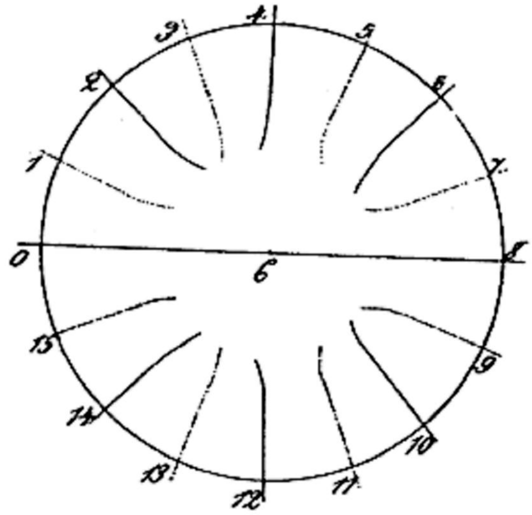


Fig. 4.

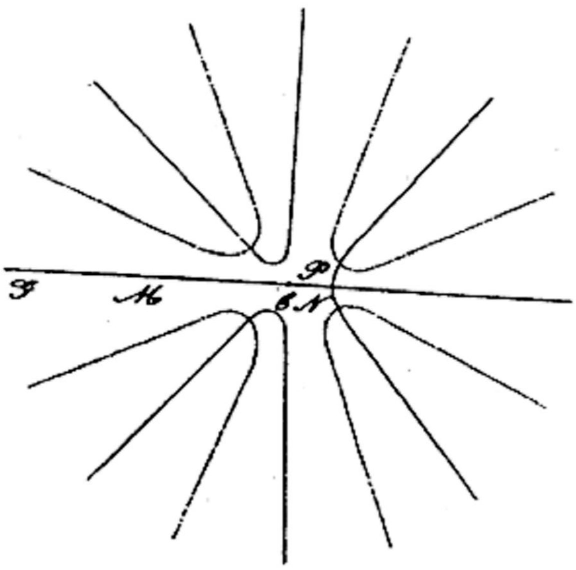
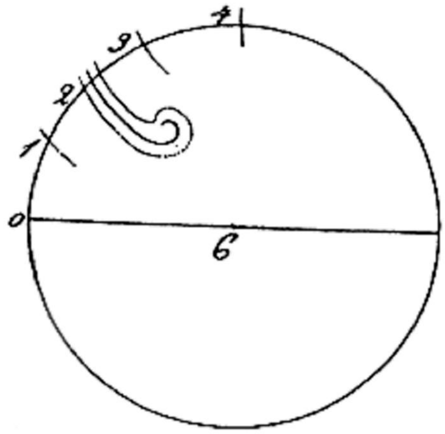


Fig. 3.



DEMONSTRATIO NOVA
THEOREMATIS
OMNEM FVNCTIONEM ALGEBRAICAM
RATIONALEM INTEGRAM
VNIVS VARIABILIS
IN FACTORES REALES PRIMI VEL SECVNDI GRADVS
RESOLVI POSSE

QVAM
PRO
OBTINENDIS SVMMIS IN PHILOSOPHIA HONORIBVS
INCLITO PHILOSOPHORVM ORDINI
ACADEMIAE IVLIAE CAROLINAE

EXHIBVIT
CAROLO FRIDERICO GAVSS

HELMSTADII
APVD C. G. FLECKEISEN. 1799.

1.

Quaelibet aequatio algebraica determinata reduci potest ad formam $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + M = 0$, ita vt *m* sit numerus integer positiuus. Si partem primam huius aequationis per *X* denotamus, aequationique *X*=0 per plures valores inaequales ipsius *x* satisfieri supponimus, puta ponendo *x*=α, *x*=β, *x*=γ etc. functio *X* per productum e factoribus *x*-α, *x*-β, *x*-γ etc. diuisibilis erit. Vice versa, si productum e pluribus factoribus simplicibus *x*-α, *x*-β, *x*-γ etc. functionem *X* metitur: aequationi *X*=0 satisfiet, aequando ipsam *x* cuicunque quantitatum α, β, γ etc. Denique si *X* producto ex *m* factoribus talibus simplicibus aequalis est (siue omnes diuersi sint, siue quidam ex ipsis identici): alii factores simplices praeter hos functionem *X* metiri non poterunt. Quamobrem aequatio m^{ti} gradus plures quam m radices habere nequit; simul vero patet, aequationem mti gradus *pauciores* radices habere posse, etsi *X* in *m* factores simplices resolubilis sit: si enim inter hos factores aliqui sunt identici, multitudo modorum diuersorum aequationi satisfaciendi necessario minor erit quam *m*. Attamen concinnitatis caussa geometrae dicere maluerunt, aequationem in hoc quoque casu *m* radices habere, et tantummodo quasdam ex ipsis aequales inter se euadere: quod vtique sibi permittere potuerunt.

2.

Quae hucusque sunt enarrata, in libris algebraicis sufficienter demonstrantur neque rigorem geometricum vspiam offendunt. Sed nimis praepropere et sine praeuia demonstratione solida adoptauisse videntur analystae theorema cui tota fere doctrina aequationum superstructa est: *Quamuis functionem talem vt X semper in m factores simplices resolui posse, siue hoc quod cum illo prorsus conspirat, quamuis aequationem mti gradus reuera habere m radices*. Quum iam in aequationibus secundi gradus saepissime ad tales casus perueniatur, qui theoremati huic repugnant: algebraistae, vt hos illi subiicerent, coacti fuerunt, fingere quantitatem quandam imaginariam cuius quadratum sit -1, et tum agnouerunt, si quantitates formae $a + b\sqrt{-1}$ perinde concedantur vt reales, theorema non modo pro aequationibus secundi gradus verum esse, sed etiam pro cubicis et biquadraticis. Hinc vero neutiquam inferre licuit, admissis quantitatibus formae $a + b\sqrt{-1}$ cuiuis aequationi quinti superiorisue gradus satisfieri posse, aut vti plerumque exprimitur (quamquam phrasim lubricam minus probarem) radices cuiusuis aequationis ad formam $a + b\sqrt{-1}$ reduci posse. Hoc theorema ab eo, quod in titulo huius scripti enunciatum est, nihil differt, si ad rem ipsam spectas, huiusque demonstrationem nouam rigorosam tradere, constituit propositum praesentis dissertationis.
Ceterum ex eo tempore, quo analystae comperti sunt, infinite multas aequationes esse, quae nullam omnino radicem haberent, nisi quantitates formae $a + b\sqrt{-1}$ admittantur, tales quantitates fictiae tamquam peculiare quantitatum genus, quas imaginarias dixerunt, vt a realibus distinguerentur, consideratae et in totam analysin introductae sunt; quonam iure? hoc loco non disputo. – Demonstrationem meam absque omni quantitatum imaginarium subsidio absoluam, etsi eadem libertate, qua omnes recentiores analystae vsi sunt, etiam mihi vti liceret.

3.

Quamuis ea, quae in plerisque libris elementaribus tamquam demonstratio theorematis nostri afferuntur, tam leuia sint, tantumque a rigore geometrico abhorreant, vt vix mentione sint digna tamen, ne quid deesse videatur, paucis illa attingam. «Vt demonstrent, quamuis aequationem $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + M = 0$, siue *X*=0, reuera habere m radices, suscipiunt probare, X in m factores simplices resolui posse. Ad hunc finem assumunt *m* factores simplices x-α, x-β, x-γ etc. vbi α, β, γ etc. adhuc sunt incognitae, productumque ex illis aequale ponunt functioni X. Tum ex comparatione coëfficientium deducunt m aequationes, ex quibus incognitas α, β, γ etc. determinari posse aiunt, quippe quarum multitudo etiam sit m. Scilicet m-1 incognitas eliminari posse, vnde emergere aequationem, quae, quam placuerit, incognitam solam contineat.» Vt de reliquis, quae in tali argumentatione reprehendi possent, taceam, quaeram tantummodo, vnde certi esse possimus, vltimam aequationem reuera vllam radicem habere? Quidni fieri posset, vt neque huic vltimae aequationi neque propositae, vlla magnitudo in toto quantitatum realium atque imaginariarum ambitu satisfaciat? – Ceterum periti facile perspicient, hanc vltimam aequationem necessario cum proposita *omnino identicam* fore, siquidem calculus rite fuerit institutus; scilicet eliminatis incognitis β, γ etc. aequationem $\alpha^m + A\alpha^{m-1} + B\alpha^{m-2} + etc. + M = 0$ prodire debere. Plura de isto ratiocinio exponere necesse non est.

Quidam auctores, qui debilitatem huius methodi percepisse videntur, tamquam *axioma* assumunt, quamuis aequationem reuera habere radicos, si non possibiles, impossibiles. Quid sub quantitatibus possibilibus et impossibilibus intellegi velint, haud satis distincte exposuisse videntur. Si quantitates possibiles idem denotare debent vt reales, impossibiles idem vt imaginariae: axioma illud neutiquam admitti potest, sed necessario demonstratione opus habet. Attamen in illo sensu expressiones accipiendae non videntur, sed axiomatis mens haec potius videtur esse: «Quamquam nondum sumus certi, necessario dari m quantitates reales vel imaginarias, quae alicui aequationi datae m^{ti} gradus satisfaciant, tamen aliquantisper hoc supponemus; nam si forte contingeret, vt tot quantitates reales et imaginariae inueniri nequeant, certe effugium patebit, vt dicamus reliquas esse impossibiles.» Si quis hac phrasi vti mauult quam simpliciter dicere, aequationem in hoc casu tot radices non habituram, a me nihil obstat: at si tum his radicibus impossibilibus ita vtitur tamquam aliquid veri sint, et e. g. dicit, summam omnium radicum aequationis $x^m + Ax^{m-1} + etc. = 0$, esse $=-A$, etiamsi impossibiles inter illas sint (quae expressio proprie significat, *etiamsi aliquae deficiant*): hoc neutiquam probare possum. Nam radices impossibiles, in tali sensu acceptae, tamen sunt radices, et tum axioma illud nullo modo sine demonstratione admitti potest, neque inepte dubitares, annon aequationes exstare possint, quae ne impossibiles quidem radices habeant? *1)

4.

Antequam aliorum geometrarum demonstrationes theorematis nostri recenseam, et quae in singulis reprehenda mihi videantur, exponam: obseruo sufficere si tantummodo ostendatur, omni aequationi quantiuis gradus $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + M = 0$ siue X=0 (vbi coëfficientes A, B etc. reales esse supponuntur) ad minimum vno modo satisfieri posse per valorem ipsius x sub forma $a + b\sqrt{-1}$ contentum. Constat enim, X tunc diuisibilem fore per factorem realem secundi gradus xx-$2ax$+aa+bb, si b non fuerit =0, et per factorem realem simplicem x-a, si b=0. In vtroque casu quotiens erit realis, et inferioris gradus quam X; et quum hic eadem ratione factorem realem primi secundiue gradus habere debeat, patet, per continuationem huius operationis functionem X tandem in factores reales simplices vel duplices resolutum iri, aut, si pro singulis factoribus realibus duplicibus binos imaginarios simplices adhibere mauis, in m factores simplices.

5.

Prima theorematis demonstratio illustri geometrae d'Alembert debetur, *Recherches sur le calcul intégral, Histoire de l'Acad. de Berlin, Année 1746, p. 182. sqq. Eadem extat in Bongainville, Traité du calcul intégral, à Paris 1754. p. 47. sqq*. Methodi huius praecipua momenta haec sunt.

Primo ostendit, si functio quaecunque X quantitatis variabilis x fiat =0 aut pro x=0 aut pro $x=\infty$, atque valorem infinite paruum realem positiuum nancisci possit tribuendo ipsi x valorem realem: hanc functionem etiam valorem infinite paruum realem negatiuum obtinere posse per valorem ipsius x vel realem vel sub forma imaginaria $p+q\sqrt{-1}$ contentum. Scilicet designante Ω valorem infinite paruum ipsius X, et ω valorem respondentem ipsius x, asserit ω per seriem valde conuergentem $a\Omega^{\alpha}+b\Omega^{\beta}+c\Omega^{\gamma}+etc.$ exprimi posse, vbi exponentes α, β, γ etc. sint quantitates rationales continuo crescentes, et quae adeo ad minimum in distantia certa ab initio positiuae euadant, terminosque, in quibus adsint, infinite paruos reddant. Iam si inter omnes hos exponentes nullus occurat, qui sit fractio denominatoris paris, omnes terminos seriei reales fieri tum pro positiuo tum pro negatiuo valore ipsius Ω; si vero quaedam fractiones denominatoris paris inter illos exponentes reperiantur, constare, pro valore negatiuo ipsius Ω terminos respondentes in forma $p+q\sqrt{-1}$ contentos esse. Sed propter infinitam seriei conuergentiam in casu priori sufficere, si terminus primus (i. e. maximus) solus retineatur, in posteriori vltra eum terminum, qui partem imaginariam primus producat, progredi opus non esse.

Per simila ratiocinia ostendi posse, si X valorem realem negatiuum infinite paruum ex valore reali ipsius x assequi possit: functionem illam valorem realem positiuum infinite paruum ex valore reali ipsius x vel ex imaginario sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contento adipisci posse.

Hinc secundo concludit, etiam valorem aliquem realem finitum ipsius X dari, in casu priori negatiuum, in posteriori positiuum, qui ex valore imaginario ipsius x sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contento produci possit.

Hinc sequitur, si X sit talis functio ipsius x, quae valorem realem V ex valore ipsius x reali v obtineat, atque etiam valorem realem quantitate infinite parua vel maiorem vel minorem ex valore reali ipsius x assequatur, eandem etiam valorem realem quantitate infinite parua atque adeo finite vel minorem vel maiorem quam V (resp.)recipere posse, tribuendo ipsi x valorem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentum. Hoc nullo negotio ex praecc. deriuatur, si pro X substitui concipitur $V+Y$, et pro x, $v+y$.

Tandem affirmat ill. d'Alembert, si X totum interuallum aliquod inter duos valores reales R, S percurrere posse supponatur (i. e. tum ipsi R, tum ipsi S, tum omnibus valoribus realibus intermediis aequalis fieri), tribuendo ipsi x valores semper in forma $p+q\sqrt{-1}$ contentos; functionem X quauis quantitate finita reali adhuc augeri vel diminui posse (prout $S>R$ vel $S<R$), manente x semper sub forma $p+q\sqrt{-1}$. Si enim quantitas realis U daretur (inter quam et R supponitur S iacere), cui X per talem valorem ipsius x aequalis fieri non posset, necessario valorem maximum ipsius X dari (scilicet quando $S>R$; minimum vero, quando $S<R$), puta T, quem ex valore ipsius x, $p+q\sqrt{-1}$, consequeretur, ita vt ipsi x nullus valor sub simili forma contentus tribui posset, qui functionem X vel minimo excessu propius versus U promoueret. Iam si in aequatione inter X et x pro x vbique substituatur $p+q\sqrt{-1}$, atque tum pars realis, tum pars, quae factorem $\sqrt{-1}$ implicet, hoc omisso, cifrae aequentur: ex duabus aequationibus hinc prodeuntibus (in quibus p, q et X cum constantibus permixtae occurrent) per eliminationem duas alias elici posse, in quarum altera p, X et constantes reperiantur altera a p libera solas q, X et constantes inuoluat. Quamobrem quum X per valores reales ipsarum p,q omnes valores ab R vsque ad T percurrerit, per praecc. X versus valorem U adhuc propius accedere posse tribuendo ipsius p, q valores tales $\alpha+\gamma\sqrt{-1}$, $\beta+\delta\sqrt{-1}$ resp. Hinc vero fieri $x=\alpha-\delta+(\gamma+\beta)\sqrt{-1}$, i. e. adhuc sub forma $p+q\sqrt{-1}$ esse, contra hyp.

Iam si X functionem talem vt $x^m+Ax^{m-1}+Bx^{m-2}+etc.+M$ denotare supponitur, nullo negotio perspicitur, ipsi x tales valores reales tribui posse, vt X totum aliquod interuallum inter duos valores reales percurrat. Quare x valorem aliquem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentum talem etiam nancisci poterit, vnde X fiat =0. Q. E. D. *2)

6.

Quae contra demonstrationem d'Alembertianam obiici posse videntur, ad haec fere redeunt.

1. Ill. d'A. nullum dubium mouet de existentia valorum ipsius x quibus valores dati ipsius X respondeant, sed illam supponit, solamque formam istorum valorum inuestigat.
Quamuis vero haec obiecto per se grauissima sit, tamen hic ad solam dictionis formam pertinet, quae facile ita corrigi potest, vt illa penitus destruatur.

2. Assertio, ω per talem seriem qualem ponit semper exprimi posse, certo est falsa, si X etiam funcionem quamlibet transscendentem designare debet (vti d'A. pluribus locis innuit). Hoc e. g. manifestum est, si ponitur $X=e^{\frac{1}{x}}$, siue $x=\frac{1}{\ln X}$. Attamen si demonstrationem ad eum casum restringimus, vbi X est functio algebraica ipsius x (quod in praesenti negotio sufficit), propositio vtique est vera. – Ceterum d'A. nihil pro confirmatione suppositionis suae attulit; cel. Bougainville supponit X esse functionem algebraicam ipsius x, et ad inuentionem seriei parallelogrammum Newtonianum commendat.

3. Quantitatibus infinite paruis liberius vtitur, quam cum geometrico rigore consistere potest aut saltem nostra aetate (vbi illae merito male audiunt) ab analysta scrupuloso concederetur, neque etiam saltum a valore infinite paruo ipsius Ω ad finitum satis luculenter explicauit. Propositionem suam, Ω etiam valorem aliquem finitum consequi posse, non tam ex possibilitate valoris infinite parui ipsius Ω, concludere videtur quam inde potius, quod denotante Ω quantitatem valde paruam, propter magnam seriei conuergentiam, quo plures termini seriei accipiantur, eo propius ad valorem verum ipsius ω accedatur, aut, quo plurium partium summa pro ω accipiatur, eo exactius aequtioni, quae relationem inter ω et Ω siue x et X exhibeat, satisfactum iri. Praeterea quod tota haec argumentatio nimis vaga videtur, quam vt ulla conclusio rigorosa inde colligi possit: obseruo, vtique dari series, quae quantumuis paruus valor quantitati, secundum cuius potestates progrediuntur, tribuatur, nihilominus semper diuergant, ita vt si modo satis longe continuentur, ad terminos quauis quantitate data maiores peruenire possis. *3) Hoc euenit, quando coëfficientes seriei progressionem hypergeometricam constituunt. Quamobrem necessario demonstrari debuisset, talem seriem hypergeometricam in casu praesenti prouenire non posse.
Ceterum mihi videtur, ill. d'A. hic non recte ad series infinitas confugisse, hasque ad stabiliendum theorema hoc fundamentale doctrinae aequationum haud idoneas esse.

4. Ex suppositione, X obtinere posse valorem S neque vero valorem U, nondum sequitur, inter S et U necessario valorem T iacere, quem X attingere sed non superare possit. Superest adhuc alius casus: scilicet fieri posset, vt inter S et U limes situs sit, ad quem accedere quidem quam prope velis possit X, ipsum vero nihilominus numquam attingere. Ex argumentis ab ill. d'A. allatis tantummodo sequitur, X omnem valorem, quem attigerit, adhuc quantitate finita superare posse, puta quando enaserit $=S$, adhuc quantitate aliqua finita Ω augeri posse; quo facto, nouum incrementum Ω' accedere, tunc iterum augmentum Ω'' etc., ita vt quotcunque incrementa iam adiecta sint, nullum pro vltimo haberi debeat, sed semper aliquod nouum accedere possit. At quamuis *multitudo* incrementorum possibilium nullis limitibus sit circumscripta: tamen vtique fieri posset, vt si incrementa Ω, Ω', Ω'' etc. continuo decrescerent,

nihilominus summa $S+\Omega+\Omega'+\Omega''$ etc. limitem aliquem numquam attingeret, quotcunque termini considerentur.

Quamquam hic casus occurrere non potest, quando X designat functionem algebraicam integram ipsius x: tamen sine demonstratione, hoc fieri non posse, methodus necessario pro incompleta habenda est. Quando vero X est functio transscendens, siue etiam algebraica fracta, casus ille vtique locum habere potest, e. g. semper quando valori cuidam ipsius X valor infinite magnus ipsius x respondet. Tum methodus d'Alembertiana non sine multis ambagibus, et in quibusdam casibus nullo forsan modo, ad principia indubitata reduci posse videtur.

Propter has rationes demonstrationem d'Alembertianam pro satisfaciente habere nequeo. Attamen hoc non obstante verus demonstrationis neruus probandi per omnes obiectiones neutiquam infringi mihi videtur, credoque eidem fundamento (quamuis longe diuersa ratione, et saltem maiori circumspicienta) non solum demonstrationem rigorosam theorematis nostri superstrui, sed ibinde omnia peti posse, quae circa aequationum transscendentium theoriam desiderari queant. De qua re grauissima alia occasione fusius agam; conf. interim infra art. 24.

7.

Post d'Alembertum ill. Euler disquisitiones suas de eodem argumento promulgauit, *Recherches sur les racines imaginaires des équations, Hist. de l'Acad. de Berlin A. 1749. p. 223 sqq*. Methodum duplicem hic tradidit: prioris summa continetur in sequentibus.

Primo ill. E. suscipit demonstrare, si m denotet quamcunque dignitatem numeri 2, functionem $x^{2m}+Bx^{2m-2}+Cx^{2m-3}+etc.+M=X$ (in qua coëfficiens termini secundi est =0) semper in duos factores reales resolui posse, in quibus x vsque ad m dimensiones ascendat. Ad hunc finem duos factores assumit, $x^m-ux^{m-1}+\alpha x^{m-2}+\beta x^{m-3}+etc.$, et $x^m+ux^{m-1}+\lambda x^{m-2}+\mu x^{m-3}+etc.$ vbi coëfficientes u, α, β etc. λ, μ etc. adhuc incogniti sunt, horumque productum aequale ponit functioni X. Tum coëfficientium comparatio suppeditat $2m-1$ aequationes, manifestoque demonstrari tantummodo debet, incognitis u, α, β etc. λ, μ etc. (quarum multitudo etiam est $2m$-1) tales valores reales tribui posse, qui aequationibus illis satisfaciant. Iam E. affirmat, si primo u tamquam cognita consideretur, ita vt multitudo incognitarum vnitate minor sit quam multitudo aequationum, his secundum methodos algebraicas notas rite combinatis omnes α, β etc. λ, μ etc. rationaliter et sine vlla radicum extractione per u et coëfficientes B, C etc. determinari posse, adeoque valores reales nancisci, simulac u realis fiat. Praeterea vero omnes α, β etc. λ, μ etc. eliminari poterunt, ita vt prodeat aequatio U=0, vbi U erit functio integra solius u et coëfficientium cognitorum. Hanc aequationem ipsam per methodum eliminationis vulgarem euoluere, opus immensum fore, quando aequatio proposita X=0 est gradus aliquantum alti; et pro gradu indeterminato, plane impossibile (iudice ipso E. p. 239.). Attamen sufficit, vnam illius aequationis proprietatem nouisse, scilicet quod terminus vltimus in U (qui incognitam u non implicat) necessario est negatiuus, vnde sequi constat, aequationem ad minimum vnam radicem realem habere, siue u et proin etiam α, β etc. λ, μ etc. ad minimum vno modo realiter determinari posse: illam vero proprietatem per sequentes reflexiones confirmare licet. Quum $x^m-ux^{m-1}+\alpha x^{m-2} etc.$ supponatur esse factor functionis X: necessario u erit summa m radicum aequationis X=0, adeoque totidem valores habere debebit, quot modis diuersis ex $2m$ radicibus m excerpi possunt, siue per principia calculi combinationum $\frac{2m\cdot(2m-1)\cdot 2(m-2)\cdot\ldots\cdot(m+1)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot\ldots\cdot m}$ valores. Hic numerus semper erit impariter par (demonstrationem haud difficilem supprimo): si itaque ponitur $=2k$, ipsius semissis k impar erit; aequatio $U=0$ vero erit gradus $2k^{ti}$. Iam quoniam in aequatione $X=0$ terminus secundus deest: summa omnium $2m$ radicum erit 0; vnde patet, si summa quarumcunque m radicum fuerit $+p$, reliquarum summam fore $-p$, i. e. si $+p$ est inter valores ipsius u, etiam $-p$ inter eosdem erit. Hinc E. concludit, U esse productum ex k factoribus duplicibus talibus $uu-pp$, $uu-qq$, $uu-rr$ etc., denotantibus $+p$, $-p$, $+q$, $-q$ etc. omnes $2k$ radices aequationis $U=0$, vnde, propter multitudinem imparem horum factorum, terminus vltimus in U erit quadratum producti pqr etc. signo negatiuo affectum. Productum autem pqr etc. semper ex coëfficientibus B, C etc. rationaliter determinari potest, adeoque necessario erit quantitas realis. Huius itaque quadratum signo negatiuo affectum certo erit quantitas negatiua. Q. E. D.

Quum hi duo factores reales ipsius X sint gradus mti atque m potestas numeri 2: eadem ratione vterque rursus in duos factores reales $\frac{1}{2}m$ dimensionum resolui poterit. Quoniam vero per repetitam dimidiationem numeri m necessario tandem ad binarium peruenitur, manifestum est, per continuationem operationis functionem X tandem in factores reales secundi gradus resolutam haberi.

Quodsi vero functio talis proponitur, in qua terminus secundus non deest, puta $x^{2m}+Ax^{2m-1}+Bx^{2m-2}+etc.+M$, designante etiamnum $2m$ potestatem binariam, haec per substitutionem $x=y-\frac{A}{2m}$ transibit in similem functionem termino secundo carentem. Vnde facile concluditur, etiam illam functionem in factores reales secundi gradus resolubilem esse.

Denique proposita functione gradus n^{ti}, designante n numerum, qui non est potestas binaria: ponatur potestas binaria proxime maior quam n, $=2m$, multipliceturque functio proposita per $2m-n$ factores simplices reales quoscunque. Ex resolubilitate producti in factores reales secundi gradus, nullo negotio deriuatur, etiam functionem propositam in factores reales secundi vel primi gradus resolubilem esse debere.

8.

Contra hanc demonstrationem obiici potest.

1. Regulam, secundum quam E. concludit, ex $2m-1$ aequationibus $2m-2$ incognitas α,β etc. λ, μ etc. omnes rationaliter determinari posse, neutiquam esse generalem, sed saepissime exceptionem pati. Si quis e. g. in art. 3, aliqua incognitarum tamquam cognita spectata, reliquas per hanc et coefficientes datos rationaliter exprimere tentat, facile inueniet, hoc esse impossibile, nullamque quantitatum incognitarum aliter quam per aequationem $m-1^{ti}$ gradus determinari posse. Quamquam vero hic statim a priori perspici potest, illud necessario ita euenire debuisse: tamen merito dubitari posset, annon etiam in casu praesenti pro quibusdam valoribus ipsius m res eodem modo se habebat; vt incognitae α,β etc. λ, μ etc. ex u,B,C etc. aliter quam per aequationem gradus forsan maioris quam $2m$ determinari nequeant. Pro eo casu, vbi aequatio $X=0$ est quarti gradus, E. valores rationales coëfficientium per u et coëfficientes datos eruit; idem vero etiam in omnibus aequationibus altioribus fieri posse, vtique explicatione ampliori egebat. – Ceterum operae pretium esse videtur, in formulas illas, quae α, β etc. rationaliter per u, B, C etc. exprimant, profundius et generalissime inquirere; de qua re aliisque ad eliminationis theoriam (argumentum haudquaquam exhaustum) pertinentibus alia occasione fusius agere suscipiam.

2. Etiamsi autem demonstratum fuerit, cuiusuis gradus sit aequatio $X=0$, semper formulas inueniri posse, quae ipsas α, β etc. λ, μ etc. rationaliter per u, B, C etc. exhibeant: tamen certum est, pro valoribus quibusdam determinatis coëfficientium B, C etc. formulas illas

indeterminatas euadere posse, ita vt non solum impossibile sit, incognitas illas rationaliter ex *u, B, C* etc. definire, sed adeo reuera quibusdam in casibus valori alicui reali ipsius *u* nulli valores reales ipsarum α, β etc. λ, μ etc. respondeant. Ad confirmationem huius rei breuitatis gratia ablego lectorem ad diss. ipsam E. vbi p. 236. aequatio quarti gradus fusius explicata est. Statim quisque videbit, formulas pro coëfficientibus α, β indeterminatas fieri, si C=0 et pro *u* assumatur valor 0, illorumque valores non solum sine extractione radicum assignari non posse, sed adeo ne reales quidem esse, si fuerit BB-4D quantitas negatiua. Quamquam vero in hoc casu u adhuc alios valores reales habere, quibus valores reales ipsarum α, β respondeant, facile perspici potest: tamen vereri aliquis posset, ne huius difficultatis enodatio (quam E. omnino non attigit) in aequationibus altioribus multo maiorem operam facessat. Certe haec res in demonstratione exacta neutiquam silentio praeteriri debet.

3. Ill. E. supponit tacite, aequationem X=0 habere 2m radices, harumque summam statuit =0 ideo quod terminus secundus in X abest. Quomodo de hac licentia (qua omnes auctores de hoc argumento vtuntur) sentiam, iam supra art. 3. declaraui. Propositio, summam omnium radicum aequationis alicuius coëfficienti primo, mutato signo, aequalem esse, ad alias aequationes applicanda non videtur, nisi quae radices habent: iam quum per hanc ipsam demonstrationem euinci debeat, aequationem X=0 reuera radices habere, haud permissum videtur, harum existentiam supponere. Sine dubio ii, qui huius paralogismi fallaciam nondum penetrauerunt, respondebunt, *hic non demonstrari, aequationi* X=0 *satisfieri posse* (nam hoc dicere vult expressio, eam habere radices), *sed tantummodo, ipsi per valores ipsios* x *sub forma* $a+b\sqrt{-1}$ *contentos satisfieri posse; illud vero tamquam axioma supponi*. At quum aliae quantitatum formae, praeter realem et imaginariam $a+b\sqrt{-1}$ concipi nequeant, non satis luculentum videtur, quomodo id quod demonstrari debet ab eo, quod tamquam axioma supponitur, differat; quin adeo si possibile esset adhuc alias formas quantitatum excogitare, puta formam *F, F', F''* etc. tamen sine demonstratione admitti non deberet, cuius aequationi per aliquem valorem ipsius x aut realem, aut sub forma $a+b\sqrt{-1}$, aut sub forma *F*, aut sub *F'* etc. contentum satisfieri posse. Quamobrem axioma illud alium sensum habere nequit quam hunc: Cuius aequationi satisfieri potest aut per valorem realem incognitae, aut per valorem imaginariam sub forma $a+b\sqrt{-1}$ contentum, aut forsan per valorem sub forma alia hucusque ignota contentum, aut per valorem, qui sub nulla omnino forma continetur. Sed quomodo huiusmodi quantitates de quibus ne ideam quidem fingere potes – vera vmbrae vmbra – summari aut multiplicari possint; hoc ea perspicuitate, quae in mathesi semper postulatur, certo non intelligitur.*4)
Ceterum conclusiones, quas E. ex suppositione sua elicuit, per has obiectiones haudquaquam suspectas reddere volo; quin potius certus sum, illas per methodum neque difficilem neque ab Euleriana multum diuersam ita comprobari posse, vt nemini vel minimus scrupulus superesse debeat. Solam *formam* reprehendo, quae quamuis in *inueniendis* nouis veritatibus magnae vtilitatis esse possit, tamen in *demonstrando*, coram publico, minime probanda videtur.

4. Pro demonstratione assertionis, productum *pqr* etc. ex coëfficientibus in *X rationaliter* determinari posse, ill. E. nihil omnino attulit. Omnia, quae hac de re in aequationibus *quarti gradus* explicat, haec sunt (vbi *a, b, c, d* sunt radices aequationes propositae $x^4+Bx^2+Cx+D=0$):
«On m'objectera sans doute, que j'al supposé ici, que la quantité *pqr* étoit une quantité réelle, et que son quarré *ppqqrr* étoit affirmatif; ce qui étoit encor douteux, vu que les racines *a, b, c, d* étant imaginaire, il pourroit bien arriver, que le quarré de la quantité *pqr*, qui en es composée, fut negatif. Or je reponds à cela que ce cas ne sauroit jamais avoir lieu; car quelque imaginaires que soient les racines *a,b,c,d*, on sait pourtant, qu'il doit y avoir $a+b+c+d$=0;

ab+ac+ad+bc +bb+cd=B; *abc+abd+acd+bcd=-C* *5); *abcd =D*, ces quantités *B,C,D* étant réelles. Mais puisque *p= a+b*, *q=a+c*, *r=a+b*, leur produit *pqr=(a+b)(a+c)a+d)* est determinable *comme on sait*, par les quantités *B,C,D*, et sera par conseéquent réel, tout comme nous avons vu, qu'il est effectivement *pqr=-C*, et *ppqqrr=CC*. On reconnoitra aisément de même, que dans les plus hautes équations cette même circonstance doit avoir lieu, et qu'on ne sauroit me faire des objections de ce coté.» Conditionem, productum *pqr* etc. rationaliter per *B,C* etc. determinari posse, E. nullibi adiecit, attamen semper subintellexisse videtur, quum absque illa demonstratio nullam vim habere possit. Iam verum quidem est in aequationibus quarti gradus, si productum *(a+b)(a+c)(a+d)* euoluatur obtineri *aa(a+b+c+d)+abc+abd+acd+bcd=-C*, attamen non satis perspicuum videtur, quomodo in omnibus aequationibus superioribus productum rationaliter per coëfficientes determinari possit. Clar. de Foncenex, qui primus hoc obseruauit (*Miscell. phil. math. soc. Taurin. T. I. p. 117.*), recte contendit, sine demonstratione rigorosa huius propositionis methodum omnem vim perdere, illam vero satis difficilem sibi videri confitetur, et quam viam frustra tentauerit, enarrat. *6) Attamen haec res haud difficulter per methodum sequentem (cuius summam addigitare tantummodo hic possum) obsoluitur: Quamquam in aequationibus quarti gradus non satis clarum est, productum *(a+b)(a+c)(a+d)* per coëfficientes *B,C,D* determinabile esse, tamen facile perspici potest, idem productum etiam esse = *(b+a)(b+c)(b+d)*, nec non =*(c+a)(c+b) (c+d)*, denique etiam =*(d+a)(d+b)(d+c)*. Quare productum *pqr* erit quadrans summae *(a+b)(a+c)(a+d)+(b+a)(b+c)(b+d)+ (c+a)(c+b)(c+d)+(b+a)(b+d)(d+c)*, quam, si evoluatur, fore functionem rationalem integram radicum *a,b,c,d* talem, in quam omnes eadem ratione ingrediantur, nullo negotio a priori praeuideri potest. Tales vero functiones semper rationaliter per coëfficientes aequationis, cuius radices sunt *a, b, c, d*, exprimi possunt. – Idem etiam manifestum est, si productum *pqr* sub hanc formam redigatur:

$$\frac{1}{2}(a+b-c-d)\cdot\frac{1}{2}(a+c-b-d)\cdot\frac{1}{2}(a+d-b-c)$$

quod productum euolutum omnes *a, b, c, d* eodem modo implicaturum esse facile praeuideri potest. Simul periti facile hinc colligent, quomodo hoc ad altiores aequationes applicare debeat. – Completam demonstrationis expositionem, quam hic apponere breuitas non permittit, vna cum vberiori disquisitione de functionibus plures variabiles eodem modo inuoluentibus ad aliam occasionem mihi reseruo.

Ceterum obseruo, praeter has quatuor obiectiones, adhuc quaedam alia in demonstratione E. reprehendi posse, quae tamen silentio praetereo, ne forte censor nimis seuerus esse videar, praesertim quum praecedentia satis ostendere videatur, demonstrationem in ea quidem forma, in qua ab E. proposita est, pro completa neutiquam haberi posse.

Post hanc demonstrationem, E. adhuc aliam viam theorema pro aequationibus, quarum gradus non est potestas binaria, ad talium aequationum resolutionem reducendi ostendit: attamen quum methodus haec pro aequationibus quarum gradus est potestas binaria, nihil doceat, insuperque omnibus obiectionibus praecc. (praeter quartam) aeque obnoxia sit vt demonstratio prima generalis: haud necesse est illam hic fusius explicare.

9.

In eadem commentatione ill. E. theorema nostrum adhuc alia via confirmare annixus est p. 263, cuius summa continetur in his: Proposita aequatione $x^n + Ax^{n-1} + Bx^{n-2} etc. = 0$, hucusque quidem expressio analytica, quae ipsius radices exprimat, inueniri non potuit, si exponens *n*>4; attamen certum esse videtur (vti asserit E.), illam nihil aliud continere posse, quam operationes arithmeticas et extractiones radicum eo magis complicatas, quo maior sit *n*. Si hoc conceditur, E. optime ostendit, quantumuis inter se complicata sint signa radicalia, tamen formulae valorem semper per formam $M+N\sqrt{-1}$ repraesentabilem fore, ita vt *M, N* sint quantitates reales.

Contra hoc ratiocinium obiici potest, post tot tantorum geometrarum labores perexiguam spem superesse, ad resolutionem generalem aequationum algebraicarum vmquam perueniendi, ita vt magis magisque verisimile fiat, talem resolutionem omnino esse impossibilem et contradictoriam. Hoc eo minus paradoxum videri debet, *quum id quod vulgo resolutio aequationis dicitur proprie nihil aliud sit quam ipsius reductio ad aequationes puras*. Nam aequationum purarum solutio hinc non docetur sed supponitur, et si radicem aequationis $x^m = H$ per $\sqrt[m]{H}$ exprimis illam neutiquam soluisti, neque plus fecisti, quam si ad denotandam radicem aequationis $x^h + x^{h-1} + etc. = 0$ signum aliquod excogitares, radicemque huic aequalem poneres. Verum est, aequationes puras propter facilitatem ipsarum radices per approximationem inueniendi, et propter nexum elegantem, quem omnes radices inter se habent, prae omnibus reliquis multum praestare, adeoque neutiquam vituperandum esse, quod analystae harum radices per signum peculiare denotauerunt: attamen ex eo, quod hoc signum perinde vt signa arithmetica additionis, subtractionis, multiplicationis, diuisionis et euectionis ad dignitatem sub nomine *expressionum analyticarum* complexi sunt, minime sequitur cuiusuis aequationis radicem per illas exhibere posse. Seu, missis verbis, sine ratione sufficienti supponitur, cuiusuis aequationis solutionem ad solutionem aequationum purarum reduci posse. Forsan non ita difficile foret, impossibilitatem iam pro quinto gradu omni rigore demonstrare, de qua re alio loco disquisitiones meas fusius proponam. Hic sufficit, resolubilitatem generalem aequationum in illo sensu acceptam, adhuc valde dubiam esse, adeoque demonstrationem, cuius tota vis ab illa suppositione pendet, in praesenti rei statu nihil ponderis habere.

10.

Postea etiam clar. de Foncenex, quum in demonstratione prima Euleri defectum animaduertisset (supra art. 8. obiect. 4.), quem tollere non poterat, adhuc aliam viam tentauit et in comment. laudata p. 120. in medium protulit *7). Quae consistit in sequentibus.

Proposita sit aequatio Z=0, designante Z functionem mti gradus incognitae z. Si m est numerus impar, iam constat, aequationem hanc habere radicem realem; si vero m est par, clar. F. sequenti modo probare conatur, aequationem ad minimum vnam radicem formae $p+q\sqrt{-1}$ habere. Sit $m = 2^n \cdot i$, designante i numerum imparem, supponaturque $zz+uz+M$ esse diuisor functionis Z. Tunc singuli valores ipsius u erunt summae binarum radicum aequationis Z=0 (mutato signo), quamobrem u habebit $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2} = m'$ valores, et si u per aequationem U=0 determinari supponitur (designante U functionem integram ipsius u et coëfficientium cognitorum in Z), haec erit gradus m' ti. Facile vero perspicitur m' fore numerum formae $2^{n-1} \cdot i'$, designante i' numerum imparem. Iam nisi m' est impar, supponatur iterum, $uu+u'u+M'$ esse diuisorem ipsius U, patetque per similia ratiocinia u' determinari per aequationem U'=0, vbi U' sit functio $\frac{m'(m'-1)}{1\cdot 2}$ ti gradus ipsius u'. Posito vero $\frac{m'(m'-1)}{1\cdot 2} = m''$, erit m'' numerus formae $2^{n-2} \cdot i''$, designante i'' numerum imparem. Iam nisi m'' est impar, statuatur $u'u'+u''u'+M''$ esse diuisorem functionis U', determinabiturque u'' per aequationem U''=0, quae si supponitur esse gradus m''' ti, m''' erit numerus formae $2^{n-3} \cdot i'''$. Manifestum est, in serie aequationum U=0, U'=0, U''=0 etc. $n$tam fore gradus imparis adeoque radicem realem habere. Statuemus breuitatis gratia n=3, ita vt aequatio U''=0 radicem realem u'' habeat, nullo enim negotio perspicitur pro quouis alio valore ipsius n idem ratiocinium valere. Tunc coëfficientem M'' per u'' et coëfficientes in U' (quos fore functiones integras coëfficientium in Z facile intelligitur), siue per u'' et coëfficientes in Z rationaliter determinabilem fore asserit clar. de F., et proin realem. Hinc sequitur, radices aequationis $u'\,u'+u''u'+M''=0$ sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentas fore; eadem vero manifesto aequationi $U'=0$ satisfacient: quare dabitur valor aliquis ipsius u' sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentus. Iam coëfficiens M' (eodem modo vt ante) rationaliter per u' et coëfficientes in Z determinari potest, adeoque etiam sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentus erit; quare aequationis $uu+u'\,u+M'$ radices sub eadem forma contentae erunt, simul vero aequationi $U=0$ satisfacient, i. e. aequatio haec habebit radicem sub forma $p+q\sqrt{-1}$ contentam. Denique hinc simili ratione sequitur, etiam M sub eadem forma contineri, nec non radicem aequationis $zz+uz+M=0$, quae manifesto etiam aequationi propositae $Z=0$ satisfaciet. Quamobrem quaeuis aequatio ad minimum vnam radicem formae $p+q\sqrt{-1}$ habebit.

11.

Obiectiones 1, 2, 3, quas contra Euleri demonstrationem primam feci (art. 8.), eandem vim contra hanc methodum habent, ea tamen differentia, vt obiectio secunda, cui Euleri demonstratio tantummodo in quibusdam casibus specialibus obnoxia erat, praesentem in omnibus casibus attingere debeat. Scilicet a priori demonstrari potest, etiamsi formula detur, quae coëfficientem M' rationaliter per u' et coëfficientes in Z exprimat, hanc pro pluribus valoribus ipsius u' necessario indeterminatam fieri debere; similiterque formulam, quae coëfficientem M'' per u'' exhibeat, indeterminatam fieri pro quibusdam valoribus ipsius u'' etc. Hoc luculentissime perspicietur, si aequationem quarti gradus pro exemplo assumimus. Ponamus itaque $m=4$, sintque radices aequationis $Z=0$, hae $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. Tum patet aequationem $U=0$ fore sexti gradus ipsiusque radices $-(\alpha+\beta)$, $-(\alpha+\gamma)$, $-(\alpha+\delta)$, $-(\beta+\gamma)$, $-(\beta+\delta)$, $-(\gamma+\delta)$. Aequatio $U'=0$ autem erit decimi quinti gradus, et valores ipsius u′ hi $2\alpha+\beta+\gamma$, $2\alpha+\beta+\delta$, $2\alpha+\gamma+\delta$, $2\beta+\alpha+\gamma$, $2\beta+\alpha+\delta$, $2\beta+\gamma+\delta$, $2\gamma+\alpha+\beta$, $2\gamma+\alpha+\delta$, $2\gamma+\beta+\delta$, $2\delta+\alpha+\beta$, $2\delta+\alpha+\gamma$, $2\delta+\beta+\gamma$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$, $\alpha+\beta+\gamma+\delta$. Iam in hac aequatione, quippe cuius gradus est impar, subsistendum erit, habebitque ea reuera radicem realem $\alpha+\beta+\gamma+\delta$ (quae primo coëfficienti in Z mutato signo aequalis adeoque non modo realis sed etiam rationalis erit, si coëfficientes in Z sunt rationales). Sed nullo negotio perspici potest, si formula detur, quae valorem ipsius M' per valorem respondentem ipsius u' rationaliter exhibeat, hanc necessario pro $u'=\alpha+\beta+\gamma+\delta$ indeterminatam fieri. Hic enim valor ter erit radix aequationis $U'=0$, respondebuntque ipsi tres valores ipsius M', puta $(\alpha+\beta)(\gamma+\delta)$, $(\alpha+\gamma)\ (\beta+\delta)$ et $(\alpha+\delta)(\beta+\gamma)$, qui omnes irrationales esse possunt. Manifesto autem formula rationalis neque valorem irrationalem ipsius M' in hoc casu producere posset, neque tres valores diuersos. Ex hoc specimine satis colligi potest, methodum clar. de Foncenexii neutiquam esse satisfacientem, sed si ab omni parte completa reddi debeat, multo profundius in theoriam eliminationis inquiri oportere.

12.

Denique ill. LaGrange de theoremate nostro egit in comm. *Sur la forme des racines imaginaires des equations, Nouv. Mem. de l'Acad. de Berlin 1772. p. 222 sqq.*

Magnus hic geometra imprimis operam dedit, defectus in Euleri demonstratione prima supplere et reuera praesertim ea, quae supra (art. 8.) obiectionem tertiam et quartam constituunt, tam profunde perscrutatus est, vt nihil amplius desiderandum restet, nisi forsan in disquisitione anteriori supra theoria eliminationis (cui inuestigatio haec tota innititur)

quaedam dubia superesse videantur. – Attamen obiectionem primam omnino non attigit, quin etiam tota disquisitio superstructa est suppositioni, quamuis aequationem m^{ti} gradus reuera m radices habere.
Probe itaque iis, quae hucusque exposita sunt, perpensis, demonstrationem nouam theorematis grauissimi ex principiis omnino diuersis petitam peritis haud ingratam fore spero, quam exponere statim aggredior.

13.

LEMMA. Denotante *m* numerum integrum positiuum quemcunque, functio
$\sin\varphi\cdot x^m - \sin m\varphi\cdot r^{m-1}x + \sin(m-1)\varphi\cdot r^m$ diuisibilis erit per $xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$.
Demonstr. Pro *m*=1 functio illa sit =0 adeoque per quemcunque factorem diuisibilis; pro *m*=2 quotiens sit sin φ, et pro quouis valore maiori quotiens erit
$\sin\varphi\cdot x^{m-2} + \sin 2\varphi\cdot rx^{m-3} + \sin 3\varphi\cdot rrx^{m-4} + etc. + \sin(m-1)\varphi\cdot r^{m-2}$. Facile enim confirmatur multiplicata hac functione per $xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$, productum functioni propositae aequale fieri.

14.

LEMMA. *Si quantitas* r *angulusque* φ *ita sunt determinati, vt habeantur aequationes*
$$r^m\cos m\varphi + Ar^{m-1}\cos(m-1)\varphi + Br^{m-2}\cos(m-2)\varphi + \ldots + Krr\cos 2\varphi + Lr\cos\varphi + M = 0 \quad [1]$$
$$r^m\sin m\varphi + Ar^{m-1}\sin(m-1)\varphi + Br^{m-2}\sin(m-2)\varphi + \ldots + Krr\sin 2\varphi + Lr\sin\varphi = 0 \quad [2]$$
functio $x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + \ldots + Kxx + Lx + M = X$ diuisibilis erit per factorem duplicem $xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$, si modo $r\sin\varphi$ non =0; si vero $r\sin\varphi$=0, eadem functio diuisibilis erit per factorem simplicem $x - r\cos\varphi$.
Demonstr. I. Ex art. praec. omnes sequentes quantitates diuisibiles erunt per
$xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$:
$$\begin{array}{lll}
\sin\varphi\cdot rx^m & -\sin m\varphi\cdot r^m x & +\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m+1} \\
A\sin\varphi\cdot rx^{m-1} & -A\sin(m-1)\varphi\cdot r^{m-1}x & +A\sin(m-2)\varphi\cdot r^m \\
B\sin\varphi\cdot rx^{m-2} & -B\sin(m-2)\varphi\cdot r^{m-2}x & +B\sin(m-3)\varphi\cdot r^{m-1} \\
etc. & etc. & \\
K\sin\varphi\cdot rxx & -K\sin 2\varphi\cdot rrx & +K\sin\varphi\cdot r^3 \\
L\sin\varphi\cdot rx & -L\sin\varphi\cdot rx & * \\
M\sin\varphi\cdot r & * & +M\sin(-\varphi)\cdot r\ .
\end{array}$$
Quamobrem etiam summa harum quantitatum per $xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$ diuisibilis erit. At singularum partes primae constituunt summam $\sin\varphi\cdot rX$; secundae additae dant 0, propter [2]; tertiarum vero aggregatum quoque euanescere, facile perspicitur, si [1] multiplicatur per sinφ, [2] per cosφ, productumque illud ab hoc subducitur. Vnde sequitur, functionem $\sin\varphi\cdot rX$ diuisibilem esse per $xx - 2\cos\varphi\cdot rx + rr$, adeoque, nisi fuerit $r\sin\varphi$=0, etiam functionem *X*. Q. E. P.

II. Si vero $r\sin\varphi$=0, erit aut *r*=0 aut sinφ=0. In casu priori erit *M*=0, propter [1], adeoque *X* per *x* siue per $x - r\cos\varphi$ diuisibilis; in posteriori erit cosφ=±1, cos2φ= +1, cos3φ=±1 et generaliter $\cos n\varphi = (\cos\varphi)^n$. Quare propter [1] fiet *X*=0, statuendo $x = r\cos\varphi$, et proin functio *X* per $x = r\cos\varphi$ erit diuisibilis. Q. E. S.

15.

Theorema praecedens plerumque adiumento quantitatum imaginariarum demonstratur, vid. Euler *Introd. in Anal. Inf. T. I. p. 110*; operae pretium esse duxi, ostendere, quomodo aeque facile absque illarum auxilio erui possit. Manifestum iam est, ad demonstrationem theorematis nostri nihil aliud requiriri quam vt ostendatur: *Proposita functione quacunque* X *formae* $xm\,x^m + Ax^{m-1} + Bx^{m-2} + etc. + Lx + M$, r *et* φ *ita determinari posse, vt aequationes [1] et [2] locum habeant*. Hinc enim sequetur, X habere factorem realem primi vel secundi gradus; diuisio autem necessario producet quotientem realem inferioris gradus, qui ex eadem ratione quoque factorem primi vel secundi gradus habebit. Per continuationem huius operationis *X* tandem in factores reales simplices vel duplices resoluetur. Illud itaque theorema demonstrare, propositum est sequentium disquisitionum.

16.

Concipiatur planum fixum infinitum (planum tabulae, fig. 1.), et in hoc recta fixa infinita *GC* per punctum fixum *C* transiens. Assumta aliqua longitudine pro vnitate vt omnes rectae per numeros exprimi possint, erigatur in quouis puncto plani *P*, cuius distantia a centro *C* est *r* angulusque *GCP*=*φ*, perpendiculum aequale valori expressionis $r^m \sin m\varphi + Ar^{m-1} \sin(m-1)\varphi + etc. + Lr \sin\varphi$, quem breuitatis gratia in sequentibus semper per *T* designabo. Distantiam *r* semper tamquam positiuam considero, et pro punctis, quae axi ab altera parte iacent, angulus *φ* aut tamquam duobus rectis maior, aut tamquam negatiuus (quod hic eodem redit) spectari debet. Extremitates horum perpendiculorum (quae pro valore positiuo ipsius *T* supra planum accipiendae sunt, pro negatiuo infra, pro euanescente in plano ipsio) erunt ad superficiem curuam continuam quaquauersum infinitam, quam breuitatis gratia in sequentibus *superficiem primam* vocabo. Prorsus simili modo ad idem planum et centrum eundemque axem referatur alia superficies, cuius altitudo supra quoduis plani punctum sit $r^m \cos m\varphi + Ar^{m-1} \cos(m-1)\varphi + etc. + Lr \cos\varphi + M$, quam expressionem breuitatis gratia semper per *U* denotabo. Superficiem vero hanc, quae etiam continua et quaquauersum infinita erit, per denominationem *superficiei secundae* a priori distinguam. Tunc manifestum est, totum negotium in eo versari, vt demonstretur, ad minimum vnum punctum dari, quod simul in plano, in superficie prima et in superficie secunda iaceat.

17.

Facile perspici potest, superficiem primam partim supra planum partim infra planum iacere; patet enim distantiam a centro *r* tam magnam accipi posse, vt reliqui termini in *T* prae primo $r^m \sin m\varphi$ euanescant; hic vero, angulo *φ* rite determinato, tam positiuus quam negatiuus fieri potest. Quare planum fixum necessario a superficie prima secabitur; hanc plani cum superficie prima intersectionem vocabo *lineam primam*; quae itaque determinabitur per aequationem *T*=0. Ex eadem ratione planum a superficie secunda secabitur; intersectio constituet curuam per aequationem *U*=0 determinatam, quam *lineam secundam* appellabo. Proprie vtraque curua ex pluribus ramis constabit, qui omnino seiuncti esse possunt, singuli vero erunt lineae continuae. Quin adeo linea prima semper erit talis, quam complexam vocant, axisque *GC* tamquam pars huius curuae spectanda; quicunque enim valor ipsi *r* tribuatur, *U* semper fiet =0, quando *φ* aut =0 aut =180°. Sed praestat complexum cunctorum ramorum per omnia puncta, vbi *T*=0, transeuntium tamquam vnam curuam considerare (secundum vsum in geometria sublimiori generaliter receptum), similiterque cunctos ramos per omnia puncta transeuntes, vbi U=0. Patet iam, rem eo reductam esse, vt demonstretur, ad minimum vnum punctum in plano dari, vbi ramus aliquis lineae primae a ramo lineae secundae secetur. Ad hunc finem indolem harum linearum propius contemplari oportebit.

18.

Ante omnia obseruo, vtramque curuam esse algebraicam, et quidem, si ad coordinates orthogonales reuocetur, ordinis m^{ti}. Sumto enim initio abscissarum in C, abscissisque x versus G, applicatis y versus P, erit $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, adeoque generaliter, quidquid sit n,

$$r^n \sin n\varphi = nx^{n-1}y - \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)}{1\cdot 2\cdot 3}x^{n-3}y^3 + \frac{n\cdot\ldots\cdot(n-4)}{1\cdot\ldots\cdot 5}x^{n-5}y^5 - etc.,$$

$$r^n \cos n\varphi = x^n - \frac{n\cdot(n-1)}{1\cdot 2}x^{n-2}yy + \frac{n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot(n-3)}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4}x^{n-4}y^4 - etc..$$

Quamobrem tum T tum U constabunt ex pluribus huiusmodi terminis $ax^\alpha y^\beta$, denotantibus α, β numeros integros positiuos, quorum summa, vbi maxima est, sit $=m$. Ceterum facile praeuideri potest, cunctos terminos ipsius T factorem y inuoluere, adeoque lineam primam proprie ex recta (cuius aequatio y=0) et curua ordinis m-1^{ti} compositam esse; sed necesse non est ad hanc distinctionem hic respicere.

Maioris momenti erit inuestigatio, an linea prima et secunda crura infinita habeant, et quot qualiaque. In distantia infinita a puncto C linea prima, cuius aequatio $\sin m\varphi + \frac{A}{r}\sin(m-1)\varphi + \frac{B}{rr}\sin(m-2)\varphi + etc. = 0$, confundetur cum linea, cuius aequatio $\sin m\varphi = 0$. Haec vero exhibet m lineas rectas in puncto A se secantes, quarum prima est axis GCG', reliquae contra hanc sub angulis $\frac{1}{m}180$, $\frac{2}{m}180$, $\frac{3}{m}180$ etc. graduum inclinatae. Quare linea prima $2m$ ramos infinitos habet, qui peripheram circuli radio infinito descripti in $2m$ partes aequales dispertiuntur, ita vt peripheria a ramo primo secetur in concursu circuli et axis, a secundo in distantia $\frac{1}{m}180^\circ$, a tertio in distantia $\frac{2}{m}180^\circ$ etc. Eodem modo linea secunda in distantia infinita a centro habebit asymptotam per aequationem $\cos m\varphi = 0$ expressam, quae est complexus m rectarum in puncto C sub aequalibus angulis itidem se secantium, ita tamen, vt prima cum axi CG constituat angulum $\frac{1}{m}90^\circ$, secunda angulum $\frac{3}{m}90^\circ$, tertia angulum $\frac{5}{m}90^\circ$ etc. Quare linea secunda etiam $2m$ ramos infinitos habebit, quorum singuli medium locum inter binos ramos proximos linea primae occupabunt, ita vt peripheriam circuli radio infinite magno descripti in punctis, quae $\frac{1}{m}90^\circ$, $\frac{3}{m}90^\circ$, $\frac{5}{m}90^\circ$ etc. ab axe distant, secent. Ceterum palam est, axem ipsum semper duos ramos infinitos lineae primae constituere, puta primum et m+1^{tum}. Luculentissime hic ramorum situs exhibetur in fig. 2, pro casu m=4 constructa, vbi rami lineae secundae, vt a ramis lineae primae distinguantur, punctati exprimuntur, quod etiam de figura quarta est tenendum. *8) – Quum vero hae conclusiones maximi momenti sint, quantitatesque infinite magnae quosdam lectores offendere possint: illas etiam absque infinitorum subsidio in art. sequ. eruere docebo.

THEOREMA. *Manentibus cunctis vt supra, ex centro* C *describi poterit circulos, in cuius peripheria sint* 2m *puncta, in quibus* T=0*, totidemque, in quibus* U=0*, et quidem ita, vt singula posteriora inter bina priorum iaceant.*

Sit summa omnium coëfficientium *A,B* etc. *K,L,M*, positiue acceptorum =*S*, accipiaturque *R* simul $>S\sqrt{2}$ et >1 *9): tum dico in circulo radio *R* descripto ea, quae in theoremate enunciata sunt, necessario locum habere. Scilicet designato breuitatis gratia eo puncto huius circumferentiae, quod $\frac{1}{m}45$ gradibus ab ipsius concursu cum laeua parte axis distat, siue pro quo $\varphi=\frac{1}{m}45^\circ$, per (1); similiter eo puncto, quod $\frac{3}{m}45^\circ$, ab hoc concursu distat, siue pro quo $\varphi=\frac{3}{m}45^\circ$, per (3); porro eo, vbi $\varphi=\frac{5}{m}45^\circ$, per (5) etc. vsque ad (8*m*-1), quod $\frac{8m-1}{m}45$ gradibus ab illo concursu distat, si semper versus eandem partem progrederis, (aut $\frac{1}{m}45^\circ$ a parte opposita), ita vt omnino 4*m* puncta in peripheria habeantur, aequalibus interuallis dissita: iacebit inter (8*m*-1) et (1) vnum punctum, pro quo *T*=0; nec non sita erunt similia puncta singula inter (3) et (5); inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc. quorum itaque multitudo 2*m*; eodemque modo singula puncta, pro quibus *U*=0, iacebunt inter (1) et (3); inter (5) et (7); inter (9) et (11), quorum multitudo igitur etiam =2*m*; denique praeter haec 4m puncta alia, in tota peripheria non dabuntur, pro quibus vel *T* vel *U* sit =0.

Demonstr. I. In puncto (1) erit mφ=45° adeoque

$$T=R^{m-1}\left(R\sqrt{\frac{1}{2}}+A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+etc.+\frac{L}{R^{m-2}}\sin\varphi\right);$$ summa vero

$$A\sin(m-1)\varphi+\frac{B}{R}\sin(m-2)\varphi+etc.$$ certo

non poterit esse maior quam *S*, adeoque necessario erit minor quam $R\sqrt{\frac{1}{2}}$: vnde sequitur in hoc puncto valorem ipsius *T* certo esse positiuum. A potiori itaque *T* valorem positiuum habebit, quando mφ inter 45° et 135° iacet, i. e. a puncto (1) vsque ad (3) valor ipsius *T* semper positiuus erit. Ex eadem ratione *T* a puncto (9) vsque ad (11) positiuum valorem vbique habebit, et generaliter a quouis puncto (8*k*+1) vsque ad (8*k*+3), denotante *k* integrum quemcunque. Simili modo *T* vbique inter (5) et (7), inter (13) et (15) etc. et generaliter inter (8*k*+5) et (8*k*+7) valorem negatiuum habebit, adeoque in omnibus his interuallis nullibi poterit esse =0. Sed quoniam in (3) hic valor est positiuus, in (5) negatiuus: necessario alicubi inter (3) et (5) erit =0; nec non alicubi inter (7) et (9); inter (11) et (13) etc. vsque ad interuallum inter (8*m*-1) et (1) incl., ita vt omnino in 2*m* punctis habeatur *T*=0. Q. E. P.

II. Quod vero praeter haec 2*m* puncta, alia, hac proprietate praedita, non dantur, ita cognoscitur. Quum inter (1) et (3); inter (5) et (7) etc. nulla sint, aliter fieri non posset, vt plura talia puncta exstent, quam si in aliquo interuallo inter (3) et (5), vel inter (7) et (9) etc. ad minimum duo iacerent. Tum vero nesessario in eodem interuallo *T* alicubi esset maximum, vel minimum, adeoque $\frac{dT}{d\varphi}=0$. Sed $\frac{dT}{d\varphi}=mR^{m-2}\left(R\cos m\varphi+\frac{m-1}{m}A\cos(m-1)\varphi+etc.\right)$ et

$\cos m\varphi$ inter (3) et (5) semper est negatiuus et $>\sqrt{\frac{1}{2}}$. Vnde facile perspicitur in toto hoc interuallo $\frac{dT}{d\varphi}$ esse quantitatem negatiuam; eodemque modo inter (7) et (9) vbique positiuam; inter (11) et (13) negatiuam etc. ita vt in nullo horum interuallorum esse possit 0, adeoque suppositio consistere nequeat. Quare etc. Q. E. S.

III. Prorsus simili modo demonstratur, U habere valorem negatiuum vbique inter (3) et (5), inter (11) et (13) etc. et generaliter inter ($8k$+3) et ($8k$+5); positiuum vero inter (7) et (9), inter (15) et (17) etc. et generaliter inter ($8k$+7) et ($8k$+9). Hinc statim sequitur, U=0 fieri debere alicubi inter (1) et (3), inter (5) et (7) etc., i. e. in $2m$ punctis. In nullo vero horum interuallorum fieri poterit $\frac{dU}{d\varphi}=0$ (quod facile simili modo vt supra probatur): quamobrem plura quam illa $2m$ puncta in circuli peripheria non dabuntur, in quibus fiat U=0. Q. E. T. et Q.

Ceterum ea theorematis pars, secundum quam plura quam $2m$ puncta non dantur, in quibus T=0, neque plura quam $2m$, in quibus U=0, etiam inde demonstrari potest, quod per aequationes T=0, U=0 exhibentur curuae m^{ti} ordinis, quales a circulo tamquam curuae secundi ordinis in pluribus quam $2m$ punctis secari non posse, ex geometria sublimiori constat.

20.

Si circulus alius radio maiori quam R ex eodem centro describitur, eodemque modo diuiditur: etiam in hoc inter puncta (3) et (5) iacebit punctum vnum, in quo T=0, itemque inter (7) et (9) etc., perspicieturque facile, quo minus radius huius circuli a radio R differat, eo propius huiusmodi puncta inter (3) et (5) in vtriusque circumferentia sita esse debere. Idem etiam locum habebit, si circulus radio aliquantum minori quam R, attamen maiori quam $S\sqrt{2}$ et 1 describitur. Ex his nullo negotio intelligitur, circuli radio R descripti circumferentiam in eo puncto inter (3) et (5), vbi T=0, reuera secari ab aliquo ramo lineae primae; idemque valet de reliquis punctis, vbi T=0. Eodem modo patet, circumferentiam circuli huius in omnibus $2m$ punctis, vbi U=0, ab aliquo ramo lineae secundae secari. Hae conclusiones etiam sequenti modo exprimi possunt: Descripto circulo debitae magnitudinis e centro C, in hunc intrabunt $2m$ rami lineae primae totidemque rami lineae secundae, et quidem ita, vt bini rami proximi lineae primae per aliquem ramum lineae secundae ab inuicem separentur. Vid. fig. 2, vbi circulus iam non infinitae sed finitae magnitudinis erit, numerique singulis ramis adscripti cum numeris, per quos in art. praec. et hoc limites certos in peripheria breuitatis caussa designaui, non sunt confundendi.

21.

Iam ex hoc situ relatiuo ramorum in circulum intrantium tot modis diuersis deduci potest, intersectionem alicuius rami lineae primae cum ramo lineae secundae intra circulum necessario dari, vt quaenam potissimum methodus prae reliquis eligenda sit, propemodum nesciam. Luculentissima videtur esse haec: Designemus (fig. 2.) punctum peripheriae circuli, vbi a laeua axis parte (quae ipsa est vnus ex $2m$ ramis lineae primae) secatur, per 0; punctum proximum, vbi ramus lineae secundae intrat, per 1; punctum huic proximum, vbi secundus lineae primae ramus intrat, per 2, et sic porro vsque ad $4m$-1, ita vt in quouis puncto numero pari signato ramus lineae secundae in circulum intret, contra ramus lineae secundae in omnibus punctis per numerum imparem expressis. Iam ex geometria sublimori constat, quamuis curuam algebraicam, (siue singulas cuiusuis curuae algebraicae partes, si forte e pluribus composita sit) aut in se redientem aut vtrimque in infinitum excurrentem esse, adeoque si ramus aliquis curuae algebraicae in spatium definitum intret, eundem necessario ex hoc spatio rursus alicubi exire debere. *10) Hinc concluditur facile, quoduis punctum numero pari signatum (seu, breuitatis caussa, quoduis punctum par) per ramum lineae primae cum alio puncto pari intra circulum iunctum esse debere, similiterque quoduis punctum numero impari notatum cum alio simili puncto per ramum lineae secundae. Quamquam vero haec binorum punctorum connexio secundum indolem functionis X perquam diuersa esse potest, ita vt in genere determinari nequeat, tamen facile demonstrari potest, *quaecunque demum illa sit, semper intersectionem lineae primae cum linea secunda oriri*.

22.

Demonstratio huius necessitatis commodissime apagogice repraesentari posse videtur. Scilicet supponamus, iunctionem binorum quorumque punctorum parium, et binorum quorumque punctorum imparium ita adornari posse, vt nulla intersectio rami lineae primae cum ramo lineae secundae inde oriatur. Quoniam axis est pars lineae primae, manifesto punctum 0 cum puncto $2m$ iunctum erit. Punctum 1 itaque cum nullo puncto vltra axem sito, i. e. cum nullo puncto per numerum maiorem quam $2m$ expresso iunctum esse potest, alioquin enim linea iungens necessario axem secaret. Si itaque 1 cum puncto n iunctum esse supponitur, erit $n<2m$. Ex simili ratione si 2 cum n' iunctum esse statuitur, erit $n'<n$, quia alioquin ramus 2 ... n' ramum 1 ... n necessario secaret. Ex eadem caussa punctum 3 cum aliquo punctorum inter 4 et n' iacentium iunctum erit, patetque si 3,4,5 etc. iuncta esse supponantur cum n'', n''', n'''' etc., n''' iacere inter 5 et n'', n'''' inter 6 et n''' etc. Vnde perspicuum est, tandem ad aliquod punctum h peruentum iri, quod cum puncto $h+2$ iunctum sit, et tum ramus, qui in puncto $h+1$ in circulum intrat, necessario ramum puncta h et $h+2$ iungentem secabit. Quia autem alter horum duorum ramorum ad lineam primam, alter ad secundam pertinebit, manifestum iam est, suppositionem esse contradictoriam, adeoque necessario alicubi intersectionem lineae primae cum linea secunda fieri.

Si haec cum praecedentibus iunguntur, ex omnibus disquisitionibus explicatis colligetur, theorema, *quamuis functionem algebraicam rationalem integram vnius indeterminatae in factores reales primi vel secundi gradus resolui posse,* omni rigore esse demonstratum.

23.

Ceterum haud difficile ex iisdem principiis deduci potest, non solum vnam sed ad minimum m intersectiones lineae primae cum secunda dari, quamquam etiam fieri potest, vt linea prima a pluribus ramis lineae secundae in eodem puncto secetur, in quo casu functio X plures factores aequales habebit. Attamen quum hic sufficiat, vnius intersectionis necessitatem demonstrauisse, fusius huic rei breuitatis caussa non immoror. Ex eadem ratione etiam alias harum linearum proprietates hic vberius non persequor, e. g. intersectionem semper fieri sub angulis rectis; aut si plura crura vtriusque curuae in eodem puncto conueniant, totidem crura lineae primae affore, quot crura lineae secundae, haecque alternatim posita esse, et sub aequalibus angulis se secare etc.

Denique obseruo, minime impossibile esse, vt demonstratio praecedens, quam hic principiis geometricis superstruxi, etiam in forma mere analytica exhibeatur: sed eam repraesentationem, quam hic explicaui, minus abstractam euadere credidi, verumque neruum probandi hic multo clarius ob oculos poni, quam a demonstratione analytica exspectari possit.

Coronidis loco adhuc aliam methodum theorema nostrum demonstrandi addigitabo, quae primo aspectu non modo a demonstratione praecedente, sed etiam ab omnibus demonstrationibus reliquis supra enarratis maxime diuersa esse videbitur, et quae nihilominus cum d'Alembertiana, si ad essentiam spectas, proprie eadem est. Cum qua illam comparare, parallelismumque inter vtramque explorare peritis committo, in quorum gratiam vnice subiuncta est.

24.

Supra planum figurae 4. relatiue ad axem CG punctumque fixum C descriptas suppono superficiem primam et secundam eodem modo vt supra. Accipe punctum quodcunque in aliquo ramo lineae primae situm siue vbi T=0, (e. g. quodlibet punctum M in axe iacens), et nisi in hoc etiam U=0, progredere ex hoc puncto in linea prima versus eam partem, versus quam magnitudo absoluta ipsius U decrescit. Si forte in puncto M valor absolutus ipsius U versus vtramque partem decrescit, arbitrarium est, quorsum progrediaris; quid vero faciendum sit, si U versus vtramque partem crescat, statim docebo. Manifestum est itaque, dum semper in linea prima progrediaris, necessario tandem te ad punctum peruenturum, vbi U=0, aut ad tale, vbi valor ipsius U fiat minimum, e. g. punctum N. In priori casu quod quaerebatur inuentum est; in posteriori vero demonstrari potest, in hoc puncto plures ramos lineae primae sese intersecare (et quidem multitudinem parem ramorum), quorum semissis ita comparati sint, vt si in aliquem eorum deflectas (siue huc siue illuc) valor ipsius U adhucdum decrescere pergat. (Demonstrationem huius theorematis, prolixiorem quam difficiliorem breuitatis gratia supprimere debeo.) In hoc itaque ramo iterum progredi poteris, donec U aut fiat =0 (vti in fig. 4. euenit in P), aut denuo minimum. Tum rursus deflectes, necessarioque tandem ad punctum peruenies, vbi sit U=0.

Contra hanc demonstrationem obiici posset dubium, annon possibile sit, vt quantumuis longe progrediaris, et quamuis valor ipsius U semper decrescat, tamen haec decrementa continuo tardiora fiant, et nihilominus ille valor limitem aliquem nusquam attingat; quae obiectio responderet quartae in art. 6. Sed haud difficile foret, terminum aliquem assignare, quem simulac transieris, valor ipsius U necessario non modo semper rapidius mutari debeat, sed etiam decrescere non amplius possit, ita vt antequam ad hunc terminum perueneris, necessario valor 0 etiam affuisse debeat. Hoc vero et reliqua, quae in hac demonstratione addigitare tantummodo potui, alia occasione fusius exsequi mihi reseruo.

*1) Sub quantitate imaginaria hic semper intelligo quantitatem in forma $a+b\sqrt{-1}$ contentam, quamdiu b non est $= 0$. In hoc sensu expressio illa semper ab omnibus geometris primae notae accepta est, neque audiendos censeo, qui quantitatem $a+b\sqrt{-1}$ in eo solo casu imaginariam vocare voluerunt vbi $a = 0$, impossibilem vero quando non sit $a = 0$, quam haec distinctio neque necessaria sit neque vllius vtilitatis. Si quantitates imaginariae omnino in analysi retineri debent (quod pluribus rationibus consultius videtur, quam ipsas abolere, modo satis solide stabiliantur): necessario tamquam aeque possibiles ac reales spectandae sunt; quamobrem reales et imaginarias sub denominatione communi *quantitatum possibilium* complecti mallem: contra *impossibilem* dicerem quantitatem, quae conditionibus satisfacere debeat, quibus ne imaginariis quidem concessis satisfieri potest, attamen ita, vt *phrasis* haec idem significet ac si dicas, talem quantitatem in toto magnitudum ambitu non dari. Hinc vero genus peculiare quantitatum formare, neutiquam concederem. Qoudsi quis dicat, triangulum rectilineum aequilaterum rectangulum impossibile esse, nemo erit qui neget. At si tale triangulum impossibile tamquam nouum triangulorum genus contemplari, aliasque triangulorum proprietates ad illud applicare voluerit, ecquis risum teneat? Hoc esset verbis ludere seu potius abuti.
Quamuis vero etiam summi mathematici saepius veritates, quae quantitatum ad quas spectant possibilitatem manifesto supponunt, ad tales quoque applicauerint quarum possibilitas adhuc dubia erat; neque abnuerim, huiusmodi licentias plerumque ad solam formam et quasi velamen raticioniorum pertinere, quod veri geometrae acies mox penetrare possit: tamen consutius, scientiaeque, quae tamquam perfectissimum claritatis et certitudinis exemplar merito celebratur, sublimitate magis dignum videtur, tales libertates aut omnino proscribere, aut saltem parcius neque alias ipsis vti, nisi vbi etiam minus exercitati perspicere valeant, rem etiam absque illarum subsidio etsi forsan minus breuiter tamen aeque rigorose absolui potuisse.
Ceterum haud negauerim, ea quae hic contra impossibilium abusum dixi, quodam respectu etiam contra imaginarias obiici posse: sed harum vindicationem nec non totius huius expositionem vberiorem ad aliam occasionem mihi reseruo.

*2) Obseuare conuenit, ill. d'Alembert in sua huius demonstrationis expositione considerationes geometricas adhibuisse, atque X tamquam abscissam, x tamquam ordinatam curuae spectauisse (secundum morem omnium geometrarum primae huius saeculi partis, apud quos notio functionum minus vsitata erat). quia vero omnia ipsius ratiocinia, si ad ipsorum essentiam solam respicis, nullis principiis geometricis, sed pure analyticis innituntur, et curua imaginaria, ordinataeque imaginariae expressiones duriores esse lectoremque hodiernum facilius offendere posse videntur, formam repraesentationis mere analyticam hic adhibere malui. Hanc annotationem ideo adieci, ne quis demonstrationem d'Alambertianam ipsam cum hac succinta expositione comparans aliquid essentiale immutatum esse suspicetur.

*3) Hacce occasione obiter adnoto, ex harum serierum numero plurimas esse, quae primo aspectu maxime conuergentes videantur, e.g. ad maximam partem eas, quibus ill. Euler in parte poster Inst. Calc. Diff Cap. VI. ad summam aliarum serierum quam proxime assignandam vtitur p.441-474. (reliquae enim series p.475-478. reuera conuergere possunt), quod quantum scio, a nemine hucusque obseruatum est. Quocirca magnopere optandum esset, vt dilucide et rigorose ostenderetur, cur huiusmodi series, quae primo citissime, dein paullatim lentius lentiusque conuergunt, tandemque magis magisque diuergunt, nihilominus summam proxime veram suppeditent, si modo non nimis multi termini capiantur, et quousque talis summa pro exacta tuto haberi possit?

*4) Tota haec res multum illustrabitur per aliam disquisitionem sub preloiam iam sudantem, vbi in argumento longe quidem diuerso, nihilominus tamen analogo, licentiam similem prorsus eodem iure vsurpare potuissem, vt hic in aequationibus ab omnibus analystis factum est. Quamquam vero plurium veritatum demonstrationes adiumento talium fictionum paucis verbis absoluere licuisset, quae absque his perquam difficiles euadunt et subtilissima artificia requirunt, tamen illis omnino abstiniere malui, speroque, paucis me satisfactorum fuisse, si analystarum methodum imitatus essem.

*5) E. per errorem habet C, vnde etiam postea perperam statuit $pqr = C$.

*6) In hanc expositionem error irrepsisse videtur, scilicet p.118. 1.5. loco characteris p ((*on choisissoit seulement celles où entroit p* etc.) necessario legere oportet, *une même racine quelconque de l' équation proposée*, aut simile quid, quum illud nullum sensum habeat.

*7) In tomo secundo eorundem Miscellaneorum p.337. dilucidationes ad hanc commentationem continentur: attamen hae ad disquisitionem praesentum non pertinent, sed ad logartithmos quantitatum negatiuarum, de quibus in eadem comm. sermo fuerat.

*8) Figura quarta constructa est supponendo $X = x^4$-$2xx$+$3x$+10, in qua itaque lectores disquisitionibus generalibus et abstractis minus assueti situm respectiuum vtriusque curuae in concreto intueri poterunt. Longitudo linae *CG* assumta est = 10.

*9) Quando $S > \sqrt{\frac{1}{2}}$, conditio prima secundam;quando vero $S < \sqrt{\frac{1}{2}}$, secunda primam implicabit.

*10) Satis bene certe demonstratum esse videtur, curuam algebraicam neque alicubi subito abrumpi posse (vti e.g. euenit in curua transcendente, cuius aequatio $y = \frac{1}{\ln x}$), neque post spiras infinitas in aliquo puncto se quasi perdere (vt spiralis logarithmica), quantumque scio nemo dubium contra hanc rem mouit. Attamen si quis postulat, demonstrationem nullis dubiis obnoxiam alia occasione tradere suscipiam. In casu praesenti vero manifestum est, si aliquis ramus e.g. 2, ex circulo nullibi exiret (fig.3.), te in circulum inter 0 et 2 intrare, postea circa totum hunc ramum (qui in circuli spatio se perdere deberet) circummeare, et tandem inter 2 et 4 rursus ex circulo egredi posse, ita vt nillibi in tota via in lineam primam incideris. Hoc vero absurdum esse inde patet, quod in puncto, vbi in circulum inressus es, superficiem primam supra te habuisti, in engressu, infra; quare necessario alicubi in superficiem primam ipsam incidere debuisti, siue in punctum lineae primae.
Ceterum ex hoc ratiocinio principiis geometriae situs innixio, quae haud minus valida sunt, quam principia geometriae magnitudinis, sequitur tantummondo, si in aliquo ramo lineae primae in cirsulum intres , te alio loco ex circulo rursus egredi posse, semper in linea prima manando, neque vero, viam tuam esse lineam continuam in eo sensu, quo in geometria sublimiori accipitur. Sed hic sufficit, viam esse lineam continuam in sensu cmmuni, i.e. nullibi interruptam sed vbique cohaerentem.